

Exaktheit im Mathematikunterricht

von Georg Wengler & Rudolf Gruber, ph Salzburg

Abstract: Fragen zur Benennung und Bezeichnung von Objekten. Sensibilisierung für Nomenklaturen und eine gewisse „Bezeichnungshygiene“. Bedeutung der Notation von Gedankenketten und der Anwendung von Rechengesetzen. Wie exakt muss/darf die Schulmathematik sein? Wo sind präzise Denkstrukturen aus didaktischer Sicht notwendig und wo genügt ein intuitiver Zugang?

1 Beispiele aus der Arithmetik

Wenn wir in der unterrichtlichen Tätigkeit mit Zahlen hantieren, Berechnungen durchführen und Textaufgaben lösen, dann stellt sich in jeder Lernphase die Frage, wie exakt geht man mit den Rechenobjekten um. Da kann es ohne weiteres sein, dass man für einen intuitiven Zugang zu einem Problem ganz salopp eine Ideenskizze mit umgangssprachlicher Formulierung entwirft, die erst in der weiteren Analyse quasi im Nachhinein einen gewissen Grad an Exaktheit erfährt. Andererseits kann es die Einführung eines neuen Begriffes notwendig machen, dass man diesen mit einer präzisen und wohlgedachten Definition abgrenzt. In einer fortgeschrittenen Phase mag man diesen Begriff dann vielleicht auch unscharf verwenden, wenn aus dem Kontext ganz deutlich hervortritt, was der Partner meint. Der Lehrkraft wird es allerdings in jeder Unterrichtsphase helfen, wenn sie den exakten mathematischen Hintergrund kennt, damit sie entsprechend didaktisch entscheiden kann. Mit den folgend angeführten Beispielen möchten wir solche Situationen kurz beschreiben und zum Nachdenken anregen.

1.1. Die direkte und indirekte Proportionalität

Diese wird im Schulalltag auch gerne als „direkte und indirekte Schlussrechnung“ bezeichnet und bedient sich oft der Formulierungen

- (1) „je mehr ..., desto mehr ...“ bzw.
- (2) „je mehr ..., desto weniger ...“.
- (3)

In wie weit kann man diese sprachliche Ausdrucksweise akzeptieren? Was steckt mathematisch dahinter? Bei der direkten proportionalen Beziehung $y = k \cdot x$, wie wir sie wohl kennen, wird in vielen Aufgabenstellungen unausgesprochen angenommen, dass der Proportionalitätsfaktor $k > 0$ ist. Zumindest die klassisch gestellten Textaufgaben operieren mit einem positiven Faktor k . Schauen Sie sich in den entsprechenden Schulbüchern um. Bei einem negativen Faktor k stimmt die Formulierung (1) wohl nicht mehr, oder? Wenn man aber nun annimmt, es handelte sich um eine indirekte Proportion, weil ja Formulierung (2) zutrifft, dann läge man ganz ordentlich daneben.

An Hand folgender Beispiele möge man sich selber vergewissern, dass man aus der Formulierung (2) nicht notwendigerweise auf eine indirekte Proportion schließen darf:

Bsp.1:

Peter hält seinen Radiergummi hoch und lässt ihn fallen.

„je mehr Zeit vergeht, desto geringer wird die Höhe (Entfernung zum Boden).“

Bsp.2:

Wenn jemand seine Schuld von 1000 € mit monatlich konstantem Betrag von 50 € zurückzahlt, dann kann man sagen: „*je mehr Zeit vergeht, desto weniger Schulden.*“

Bsp.3:

Zahlt man die Schuld von 1000 € zu 5% monatlich zurück, dann wird man ebenfalls sagen: „*je mehr Zeit vergeht, desto weniger Schulden.*“

Bsp4:

Wir teilen 600 € auf eine gewisse Anzahl von Personen gleichmäßig auf. Es wird gelten: „*je mehr Personen vorhanden, desto weniger Geld bekommt jede einzelne Person.*“

Was darf aus der Formulierung (2) gefolgert werden? Was haben alle vier Beispiele gemeinsam? Die Antwort zeigt die jeweilige grafische Darstellung der geltenden Beziehung: In allen vier Fällen ist der Graph nämlich **monoton fallend**. Formulierung (1) beschreibt hingegen einen **monoton steigenden** Graphen. Hat man etwa eine reziproke Funktion der

Art $y = \frac{c}{x}$ mit $c < 0$ vor sich, so ist der Graph in seinem Definitionsbereich $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

überall monoton steigend und es gilt Formulierung (1). Damit hat man ebenfalls ein bestechendes Beispiel dafür, dass man aus (1) ganz und gar nicht ein direktes Verhältnis ableiten kann. Für den Unterricht bedeutet dies, dass die Formulierung (1) bzw. (2) nicht notwendigerweise eine direkte bzw. indirekte proportionale Beziehung darstellt. Kündigt allerdings eine Überschrift im Schulübungsheft, im Schulbuch und/oder auf der Tafel für die nächsten Wochen eine Beschäftigung mit der „direkten bzw. indirekten Proportionalität“ an, dann wird für SchülerInnen vermutlich aus diesem Kontext heraus der Eindruck entstehen, dass es eine andere Beziehung als diese Proportionalität gar nicht gibt. Man kann diesbezüglich nur entgegensteuern, wenn man geeignete „Gegenbeispiele“ zitiert und das Thema in ein breiteres Umfeld einbettet.

Angenommen, wir haben es nun tatsächlich mit einer direkten bzw. indirekten Proportion zu tun, dann kennt man das übliche, schematische Auflösungsritual mit den Pfeilen:

klassisches Beispiel einer direkten Proportion:

↓	3 kg Äpfel	1,8 €	↓
↓	5 kg Äpfel	x €	↓

klassisches Beispiel einer indirekten Proportion:

↓	2 Arbeitskräfte	4 Std.	↑
↓	3 Arbeitskräfte	x Std.	↑

Betrachten wir einmal das Grundsätzliche einer direkten bzw. indirekten Proportion:

Das Wesen der direkten Proportion ist, dass **quotientengleiche Paare** vorliegen, d.h. **y / x ist konstant**.

Quotientengleiche Paare:

3 kg Äpfel	/	1,8 €	oder	1,8€	/	3 kg Äpfel
5 kg Äpfel	/	x €		x €	/	5 kg Äpfel

Dieser Ansatz ist nun ebenso schematisch wie die „Pfeilmethode“, verwendet aber unmittelbar die Quotientengleichheit der direkten Proportion, wobei man in der rechts stehenden Variante etwas leichter nach x auflösen kann!

In jedem Fall wird erst eine Analyse per Tabelle und Graph diese Beziehung übersichtlich und verständlich machen.

Masse [kg]	Wert [€]
3	1,8
12	7,2
6	3,6
1	0,6
3	1,8
5	x

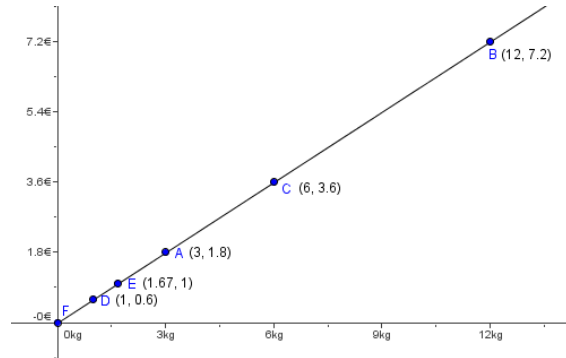


Abb. 1 Linearität der direkten Proportion

Das Wesen der indirekten Proportion hingegen ist, dass **produktgleiche Paare** vorliegen, d.h. $y * x$ ist konstant.

Produktgleiche Paare

2 Personen	*	4 Std.
3 Personen	*	x Std.

Auch dieser Ansatz ist so schematisch wie die „Pfeilmethode“, verwendet aber unmittelbar die Produktgleichheit der indirekten Proportion.

Wiederum verschafft die Aufbereitung in einer Tabelle und die Darstellung als Graph eine Übersicht über die Eigenschaften der indirekten proportionalen Beziehung, wie etwa die Krümmung, das asymptotische Verhalten etc.

Leistung [man- power]	Dauer [h]
2	4
10	2
1	1
3	x

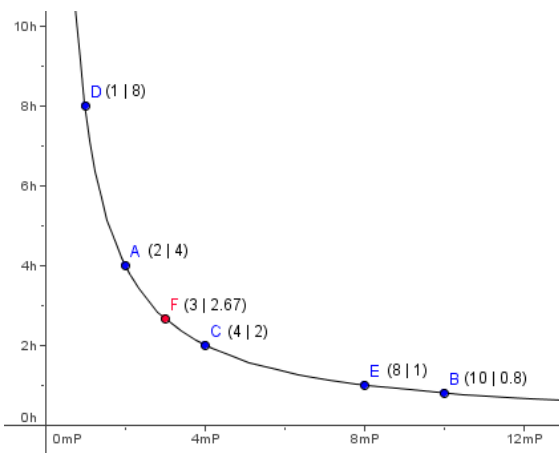


Abb. 2 Reziprozität der indirekten Proportion

Immer dann, wenn ein **Verhältnis konstant** bleibt, z.B. Weg-Zeit-Gesetz für lineare Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit v : $v = s/t \Rightarrow s(t) = v \cdot t$, liegt direkte Proportion vor.

Immer da, wo ein **Produkt konstant** bleibt, z.B. Rechteckfläche mit konstantem Inhalt F : $F = l \cdot b \Rightarrow l(b) = F/b$, liegt indirekte Proportion vor.

Weitere Beispiele liefern das Hebelgesetz oder die Geschwindigkeit-Zeit-Beziehung bei konstantem Weg.

1.2. Näherungswerte und Maßzahlen

In den meisten CAS-Programmen - wie etwa DERIVE - wird zwischen exaktem und Näherungsmodus unterschieden und für die jeweilige Auswertung das Zeichen „=“ bzw. „≈“ verwendet. Diese konsequente Unterscheidung scheint auch für den Alltagsunterricht nützlich. Wie können SchülerInnen besser zum Ausdruck bringen, ob sie gerade mit einem gerundeten, geschätzten, abgeschnittenen (abgebrochenen), gemessenen oder mit einem exakten Wert zu tun haben. Andererseits wird dadurch die Notwendigkeit der Symbolik bewusst.

Wir schreiben etwa vom Taschenrechner ab: $\sqrt{2} \approx 1.4142$ statt $\sqrt{2} = 1.4142$.

Gerade bei der Benutzung des Taschenrechners stellt sich speziell die Frage nach der sinnvollen Genauigkeit. Was bedeuten wohl folgende Maßangaben?

5,345275869 € oder 84,73281924 km/h etc.

Maßzahlen unterliegen ebenfalls einer präzisen Schreibweise, was die Fehlerbehaftetheit angeht. Es ist ein Unterschied, ob man 1 cm schreibt oder 1,0 cm, weil damit die geforderte Genauigkeit einher geht. Die Angabe $a \approx 10 \pm 0,5$ cm bedeutet als Intervall $9,5 \leq a \leq 10,5$. Ist $a = 10,0$ als gerundeter Wert angegeben, dann gilt: $9,5 \leq a < 10,5$.

Ist $a = 10,0$ als abgeschnittener Wert bekannt, dann gilt: $10,0 \leq a < 11$.

An Hand folgender Beispiele möge man sich diese Thematik näher überlegen:

- Die Länge eines Fußballfeldes soll 110m betragen. Baubedingt treten Fehler von ± 10 cm auf.
- Auf Grund von Messungenauigkeiten gibt Hans seine Körpergröße mit $165 \pm 0,5$ cm an.
- Die mittlere Entfernung Erde – Mond beträgt ungefähr $3,844 \cdot 10^5$ Kilometer.
- In einem Stromkreis mit der Sollspannung 110 V fließt 1 A Strom. Das Messgerät hat eine Toleranz von 0,05 A.
Wie groß können Abweichungen der Spannung sein, wenn der Widerstand höchstens um 5% schwankt?
Wie groß dürfen Abweichungen des Widerstands sein, damit die Spannung höchstens um 5V schwankt?

Unterscheide dabei:
Wie groß darf etwas sein, **damit**
Wie groß kann etwas werden, **wenn**

- Der Durchmesser einer Kugel sei mit einem Messfehler von p% behaftet. Mit welchem relativen Fehler muss man bei der Bestimmung des Gewichts der Kugel rechnen?
- M sei die Menge aller Zahlen, deren Dezimalbruchdarstellung nach 2 Kommastellen abbricht, $a \oplus b$ sei die zugehörige Addition und $a \otimes b$ die zugehörige Multiplikation. (M, \oplus) ist eine kommutative Gruppe, $(M \setminus \{0\}, \otimes)$ hingegen nicht. Überlege warum?

Betrachten wir einmal folgendes Gleichungssystem:

$$3.29x + 2.01y = 7.365$$

$$1.8x + 1.1y = 4.03$$

Wie man nachrechnen kann, hat das Gleichungssystem den Lösungspunkt $A=(1.2,1.7)$.

Welcher der beiden folgenden Punkte stellt die „bessere“ Näherungslösung dar?

$$B=(0.9,2.2) \text{ oder } C=(1.4,1.7)$$

Die folgende grafische Darstellung mag die Situation verdeutlichen:

- $B = (0.9, 2.2)$
- $C = (1.4, 1.7)$
- $D = (1.1767, 2.6394)$
- $c = 7.31$
- $d = 4$
- $e = 8.553$
- $g_1: 3.29x + 2.01y = 7.365$
- $g_2: 1.8x + 1.1y = 4.03$
- Abhängige Objekte
- Lösung = (1.2, 1.7)
- $f: (x - 1.2)^2 + (y - 1.7)^2 = 0.8831$
- $r_1 = -0.018$
- $r_2 = -0.01$
- $s_1 = -0.658$
- $s_2 = -0.36$

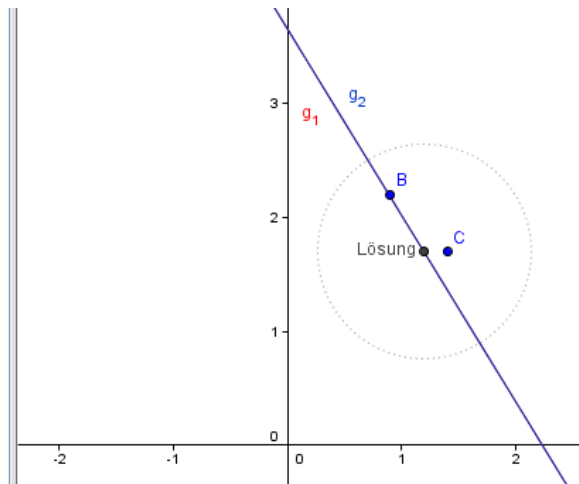


Abb. 3 welcher Punkt gilt als bessere Näherung?

Die Abb. 3 suggeriert, dass C „besser“ ist als B, weil C gemäß Abstand näher an der Lösung liegt. Berechnen wir aber die sogenannten Residuen, d.h. setzen wir die beiden Näherungspunkte jeweils in die Gleichungen ein und berechnen die Differenzen zu den Randwerten, dann erhält man für B die Residuen $r_1 = -0.018$ und $r_2 = -0.01$, für C hingegen die wesentlich größeren Werte $s_1 = -0.658$ und $s_2 = -0.36$. Wie sieht dein Urteil nun aus?

1.3. numerische versus algebraische Äquivalenz

Dass algebraische Äquivalenz nicht immer auch numerische Äquivalenz bedeuten muss, soll das folgende Beispiel zeigen. Es gilt wegen $1 = 9801 - 9800 = (99 - 70\sqrt{2})(99 + 70\sqrt{2})$ die

$$\text{algebraische Äquivalenz: } 99 - 70\sqrt{2} = \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Ein Programm wie DERIVE vereinfacht dabei zu $99 - 70\sqrt{2}$.

Berechnet man die Terme auf den beiden Seiten von (3) mit DERIVE im Näherungsmodus, dann erhält man:

$$99 - 70 \cdot \sqrt{2} = 0.005050634010 \qquad \frac{1}{99 + 70 \cdot \sqrt{2}} = 0.005050633883$$

Was stimmt nun?

Setzt man für $\sqrt{2} \approx 1.4$ ein, so wird die Sache noch drastischer:

$$99 - 70 \cdot 1.4 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{99 + 70 \cdot 1.4} = 0.005076142131$$

Schauen wir uns den Sachverhalt an, wenn man $\sqrt{2}$ mit einem Änderungswert h versieht:
Linker Term:

$$(99 - 70 \cdot \sqrt{2}) - (99 - 70 \cdot (\sqrt{2} + h)) = 70 \cdot h$$

d.h. eine Änderung h bei $\sqrt{2}$ bewirkt das 70-fache von h im Ergebnis.

Rechter Term:

$$\frac{1}{99 + 70 \cdot \sqrt{2}} - \frac{1}{99 + 70 \cdot (\sqrt{2} + h)} = \frac{70 \cdot h}{(99 + 70 \cdot \sqrt{2}) \cdot (99 + 70 \cdot (\sqrt{2} + h))} \leq \frac{70 \cdot h}{(99 + 70 \cdot \sqrt{2})^2}$$

Hier bewirkt die Änderung h bei $\sqrt{2}$ weniger als das 0.0017-fache von h im Term. Man sieht also, dass der Differenzterm wesentlich mehr „daneben“ liegt als der Bruchterm. Dies ist umso bemerkenswerter als DERIVE bei der algebraischen Vereinfachung auf die Differenz reduziert und somit numerisch den schlechteren Wert anzeigt. Das Rationalmachen des Nenners durch Erweitern erscheint also aus numerischer Sicht in diesem Beispiel unvernünftig.

Dieses Phänomen beruht auf der Tatsache, dass die Subtraktion ein instabiler Algorithmus ist, d.h. bei der Subtraktion kann es zur Löschung signifikanter Dezimalstellen kommen und die interne Darstellung „hüpft“ ohne Vorwarnung auf Null.

2 Beispiele aus der Algebra

An der Tafel steht der einfache Term: $-a$. Welches Vorzeichen hat dieser Ausdruck? Es ist unmittelbar einzusehen, dass man dies nicht sagen kann, solange nicht klar ist, wie die Variable a belegt ist. Dieses Beispiel zeigt sehr deutlich, welche grundsätzlichen Überlegungen bei der Verwendung von Variablen in der Algebra angestellt werden müssen. Jede Variable erfordert eine Fallunterscheidung hinsichtlich ihrer möglichen Belegung aus einem Wertevorrat. Sehen wir uns zunächst die Situation bei Gleichungen an.

2.1. Gleichungen

Wie exakt läuft das Lösen einer Gleichung ab?

$$\mathbb{G} = \mathbb{R}, \frac{3x+5}{2} = x \mid$$

$$\frac{3x+5}{2} = x \mid \cdot 2$$

$$3x+5 = 2x \mid -2x-5$$

$$x = -5$$

Probe:

$$\left. \begin{array}{l} T_L(-5) = \frac{3(-5)+5}{2} = \frac{-15+5}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \\ T_R(-5) = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow -5 \in \mathbb{L}$$

$$\mathbb{L} = \{(-5)\}$$

Abb. 4 Vergleich der beiden Terme der Gleichung

Zur Diskussion sei gestellt, wie man zwischen einer Probe, bei der man das ermittelte Resultat auf die Zugehörigkeit zur Lösungsmenge überprüft und jener Probe, bei der man lediglich kontrolliert, ob man sich eventuell verrechnet hat. Ein bewußtes Trennen dieser beiden Vorgänge könnte damit erreicht werden, dass man die eine Vorgehensweise Probe und die andere Kontrolle nennt.

Als weitere Idee sehen wir in der Art, wie etwa in DERIVE die Lösung mit der Zuweisung an einen festen Speicherplatz umgesetzt wird.

$$\frac{3x+5}{2} = x \mid \cdot 2$$

$$3x+5 = 2x \mid -2x -5$$

$$x = -5$$

Probe: (Analogien zu DERIVE)

$$x := (-5)$$

$$\frac{3(-5)+5}{2} = (-5)$$

$$(-5) = (-5)$$

Wahre Aussage, daher: $L = \{-5\}$

Abb. 5 Lösung als Zuweisung an die Variable

Mit der Zuweisung der Lösung an die Variable ist nämlich auch die Auswertung der Gleichung in einem Zug zu erledigen. Vielleicht ist es didaktisch ganz klug, diesen Zuordnungsoperator „:=“ bei der Lösung zu verwenden.

2.2. Terme und Formeln

2.2.1. Flächeninhaltsformel Trapez

Die Flächeninhaltsformel für ein Trapez lautet allgemein:

$$Fl = \frac{a+c}{2} \cdot h = (a+c) \cdot \frac{h}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \cdot h$$

Gibt man einem dieser Terme den Vorzug? Wenn ja, welchem und warum? Wird von den SchülerInnen erkannt, dass diese Terme algebraisch äquivalent sind?

Die nachfolgenden Grafiken Abb.6 bis Abb.8 zeigen, wie unterschiedlich äquivalente Formeltermine geometrisch interpretiert werden können:

Was bedeutet die Formel $Fl = \frac{a+c}{2} \cdot h$ geometrisch?

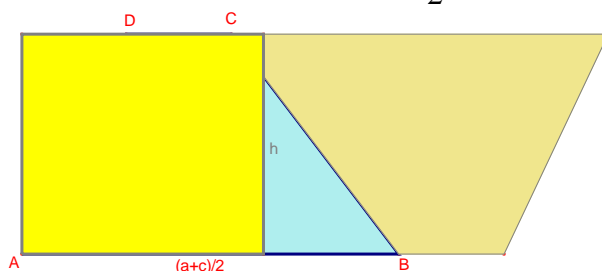


Abb. 6 geometrische Interpretation der Flächenformel

Was wird hingegen die Formel $Fl = (a+c) \cdot \frac{h}{2}$ geometrisch interpretiert?

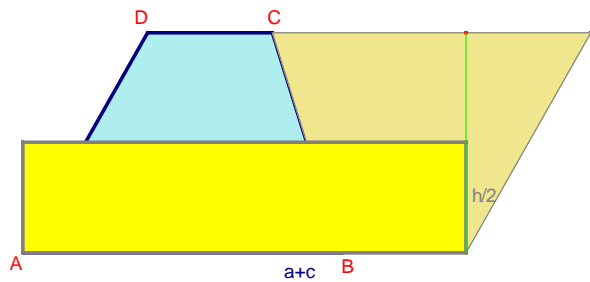


Abb. 7 geometrische Interpretation der Flächenformel

Und welche geometrische Vorgehensweise liegt in der Formel $Fl = \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right) \cdot h$?

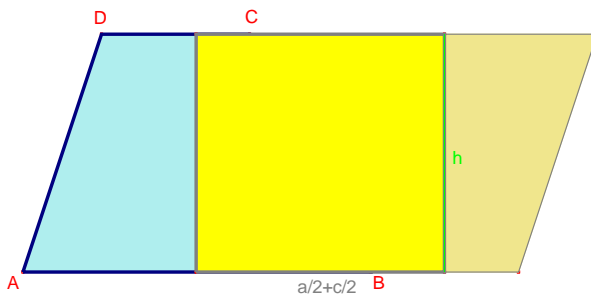


Abb. 8 geometrische Interpretation der Flächenformel

Eine Variation der Aufgabe bietet sich in der Umkehrung der Fragestellung:

Welcher Variante der Flächenformel für ein Trapez entspricht die geometrische Interpretation in Abb.9?

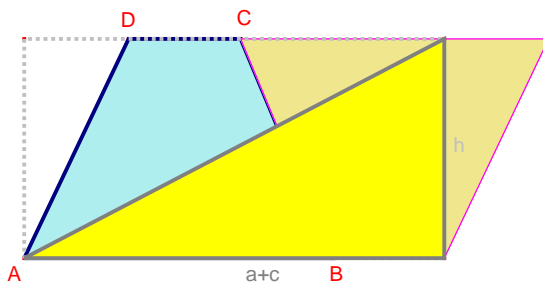


Abb. 9 geometrische Interpretation der Flächenformel

2.2.2. Die Sache mit dem Zinsfuß

Folgendes findet sich in einem Schulbuch der 4.Klasse (8.Schulstufe):

Wenn ein Geldbetrag (**KAPITAL** K) mehr als ein Jahr (mit dem **ZINSSATZ** p) verzinst wird, dann sind auch die Zinsen der Zinsen (**ZINSESZINSEN**) zu berücksichtigen. Da von der Bank von den Zinsen 25 % Kapitalertragsteuer (KESt.) für das Finanzamt abgezogen werden, wird das Guthaben nur mit dem **effektiven Zinssatz** verzinst ($p_{\text{eff}} = p \cdot 0,75$).

Z. B. $K_0 = 300 \text{ €}$, $p = 2 \%$; $p_{\text{eff}} = 2 \% \cdot 0,75 = 1,5 \%$.

nach dem ersten Jahr: $K_1 = K_0 + \left(K_0 \cdot \frac{p_{\text{eff}}}{100}\right) = 300 + \left(300 \cdot \frac{1,5}{100}\right) = 300 \cdot \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)$
 $K_1 = 300 \cdot 1,015$
 $\left(1 + \frac{p_{\text{eff}}}{100}\right)$ ist der **Aufzinsungsfaktor**, z. B. 1,015

nach dem zweiten Jahr: $K_2 = K_1 \cdot 1,015 = 300 \cdot 1,015 \cdot 1,015 = 300 \cdot 1,015^2$

nach dem dritten Jahr: $K_3 = K_2 \cdot 1,015 = 300 \cdot 1,015^2 \cdot 1,015 = 300 \cdot 1,015^3$

allgemein: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p_{\text{eff}}}{100}\right)^n$ (n ... Anzahl der Jahre)

Abb. 10 Rovina, Schmid: »Blickpunkt Mathematik 4«. öbv&hpt, Seite 142

Dazu wird etwa in Wikipedia folgende Begriffserklärung angegeben:

Zinsfuß $p = \text{Wert (z.B. 10)}$

Zinssatz $i = p/100$ (z.B. $0,1 = 10\%$)

Zinsfaktor $= 1 + i = 1 + p/100$ (z.B. $1,1$)

Im Text des Schulbuchs Abb.10 wird von p als Zinssatz gesprochen, obwohl es in der Formel als Zinsfuß verwendet wird. Setzte man hier konsequent für p_{eff} die 1,5% ein, dann erhalte man den falschen Faktor 1,00015!

In dieser Art sind immer wieder Zinsaufgaben auch in Schulbüchern zu finden, wie etwa:

$$Z = \frac{K \cdot p}{100} \quad (4)$$

Geg.: $K=200 \text{ €}$ $p = 5\%$. Berechne die Zinsen gemäß der Formel (4)!

Unterscheidet man schon begrifflich deutlich zwischen **Zinsfuß** und **Zinssatz**, dann müsste entweder die Zinsformel mit $p = 5\%$ als Zinssatz schlicht nur $Z = K \cdot p$ lauten oder die Angabe mit $p = 5$ als Zinsfuß vorgegeben sein, wobei aus Gründen der Einfachheit die erste Variante am klügsten erscheint.

2.3. Rechengesetze

Folgende „Klammernregeln“ kann man etwa im Internet finden:

Werden hier tatsächlich Vorzeichen umgedreht? Möchte man pedantisch sein, so könnte man sagen, dass sich beim Umkehren von Vorzeichen nichts ändert, weil Vorzeichen symmetrische Symbole sind.

1. und 2. Klammernregel

- Steht ein + vor einer Klammer, so kann sie weggelassen werden:
 $(3x + y) + (2x + (4y)) = 3x + y + 2x + 4y = 5x + 5y$
- Steht ein - vor einer Klammer, so werden **alle** Vorzeichen umgedreht:
 $(3x + y) - (2x - 4y) = 3x + y - 2x + 4y = x + 5y$

Abb. 11 problematische Auflösungsregel von Klammern

Nun Spaß beiseite; sehen wir uns die Sache etwas genauer an:

Welche Regeln liegen z.B. folgender Rechnung zu Grunde?

Rechnung 1: $12 - (3 - 2 + 1) = 12 - 3 + 2 - 1$

Wenn SchülerInnen die Klammern wirklich nach der in Abb.10 verkündeten „Klammernregel“ „auflösen“ und die Vorzeichen ändern, dann müsste ihr Ergebnis so aussehen:

$$12 - (-3) - (-2) + (-1).$$

Erinnern wir uns zunächst an die Gesetze der Gruppentheorie:

Sei (M, \square) eine kommutative Gruppe, dann gelten die bekannten Axiome:

- (1) $\forall a, b \in M : a \square b \in M$ (abgeschlossen)
- (2) $\forall a, b, c \in M : (a \square b) \square c = a \square (b \square c)$ (assoziativ)
- (3) $\exists 1 \in M : \forall a \in M : a \square 1 = a$ (Existenz eines neutralen Elementes)
- (4) $\forall a \in M : \exists a^* \in M : a \square a^* = 1$ (Existenz der inversen Elemente)
- (5) $\forall a, b \in M : a \square b = b \square a$ (kommutativ)

Denken wir uns also die inversen Elemente bezüglich der Addition nicht mit Vorzeichen behaftet sondern mit einem hochgestellten Stern (*) markiert.

So gesehen erscheint

- die Subtraktion als Addition des inversen Elementes: etwa $5 - 3 = 5 + 3^*$
- das Inverse des inversen Elementes: etwa $2^{**} = 2$
- das neutrale Element: etwa $0 = 3 + 3^*$

In der Rechnung 1 ist die Subtraktion folglich so zu interpretieren: $12 + (3 + 2^* + 1)$.

$12 + (3 + 2^* + 1)^*$ liefert nach den Regeln mit dem Inversen den Term: $12 + (3^* + 2^{**} + 1^*)$.

Laut Assoziativgesetz darf man die Klammern weglassen und man erhält:

$$12 + 3^* + 2 + 1^*.$$

Dort, wo wir im Ausdruck noch ein inverses Element vorfinden, können wir wieder die inverse Rechenoperation verwenden: $12 - 3 + 2 - 1$. Voila!

Was hat man letztendlich getan? Man hat die **Operationszeichen** geändert. Diesen Vorgang könnte man einfachheitshalber als „**Umpolungsregel**“ bezeichnen, weil bei der Auflösung der Klammern kurzerhand alle Operationszeichen (und nicht die Vorzeichen) umgepolt werden.

Rechnung 2: $12 : (4 \cdot 2)$

Bei der Punktrechnung verläuft die Sache ganz analog. Die Division ist die inverse Operation der Multiplikation. Dieser Interpretation zufolge werden auch hier die Klammern „aufgelöst“ indem man die Rechenoperation in den Klammern ändert. Also $12 / (4 \cdot 2)$ ergibt $12 \cdot (4 \cdot 2)^*$ bzw. $12 \cdot (4^* \cdot 2^*)$. Laut Assoziativgesetz darf man die Klammern nun weglassen und kriegt $12 \cdot 4^* \cdot 2^*$, wobei wir bei jedem inversen Element wieder die Gegenoperation schreiben können: $12 / 4 / 2$.

$$a / b / c =$$

$$a / (b / c) = \text{Die nebenstehenden drei Beispiele möge man selber auf diese Weise durchspielen.}$$

$$(a / b) / c =$$

Auch folgende Aufgabenstellung in Abb.12 erscheint in diesem Sinne algebraisch und deshalb didaktisch bedenklich:

Klammerregel

Bringe die Wörter in die richtige Reihenfolge. Anschließend überprüfe deinen Satz

Wenn ein Minuszeichen vor der Klammer steht, ändern sich die Vorzeichen in der Klammer.

Richtig, Super.
Dein Punktestand ist 92%.

Wenn

ein

Minusz

eichen

in

der

Klammer.

Abb. 12 Klammerregel unter : <http://www.stephan-schmoll.de/Inhalt/mathe/online/klammerregel1.htm>

Sind - so wie in Abb.10 - Variablen im Spiel, dann stellt sich zusätzlich die Frage, wie man das Vorzeichen ändert. Das inverse Element von x ist $(-x)$, wird die Antwort lauten.

Dahinter verbirgt sich streng genommen eine Fallunterscheidung: $-x = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}$ und das

„Minus“ wird hier als einstellige (unäre) Rechenoperation verwendet, die nur besagt, dass der Inhalt der Variablen x sein Vorzeichen ändert.

Gemäß der in Abb.11 zitierten „2.Klammernregel“ müsste das Beispiel fälschlicherweise so ausgerechnet werden: $(3x + y) - (2x - 4y) = 3x + y - 2(-x) - 4(-y) = 3x + y + 2x + 4y$.

Fazit: Die 2.Klammerregel erscheint korrekt in der Formulierung als „**Umpolungsregel**“ .

1. Klammerregel: $a + (b + c) = a + b + c$ $a + (b - c) = a + b - c$	2. Klammerregel $a - (b + c) = a - b - c$ $a - (b - c) = a - b + c$
--	---

Falls vor der Klammer ein +-Zeichen, dann kann man die Klammern weglassen.

Falls vor der Klammer ein - Zeichen, dann die Operationszeichen innerhalb der Klammern umpolen und die Klammern weglassen.

3 Beispiele aus der Geometrie

Eine Fülle von Fragen stellt sich im Hinblick auf die Bezeichnung, Benennung und Beschriftung von geometrischen Objekten. Die aufgeworfenen Fragestellungen sollen einerseits dazu anregen, zu dieser Thematik eigene Gedankengänge zu entwickeln, sie sollen aber auch auf mathematische Hintergründe hinweisen, die eine exakte Verwendung notwendig machen.

3.1. der Punkt

Wie soll man einen Punkt mit seinen Koordinaten angeben? Hier einige Angebote:

$P(3|1)$ oder $P(3,1)$ oder $P(3;1)$ oder $P = (3|1)$ oder $P=[3,1]$

Wie sieht dies in den verschiedenen mathematischen Softwareprodukten aus?

Punkte werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet.

Mögliche Darstellung in Zeichnungen und Konstruktionen:



Abb. 13 Markierung und Bezeichnung von Punkten

Welche Darstellung scheint zweckmäßig? Ist eine Normierung sinnvoll und notwendig?

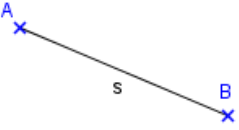
3.2. die Strecke

Auch bei der Angabe einer Strecke gibt es einige Möglichkeiten:

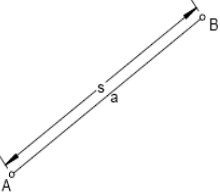
AB oder \overline{AB} oder $|AB|$ oder $|\overline{AB}|$ oder $s(A,B)$ oder $s(AB)$ oder ${}_A s_B$?

Eindimensionale Objekte werden üblicherweise mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

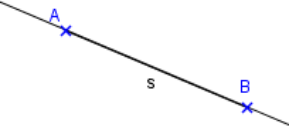
Grafische Darstellung einer Strecke:



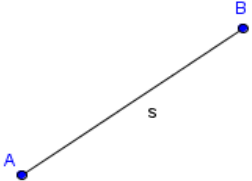
Ist die Beschriftung mit Buchstaben ein Name für die Strecke als Punktmenge oder ist ihre Länge gemeint?



Unterscheidungsvariante zwischen Namensgebung und Längenbezeichnung mit eigener Bemaßung, wie sie im technischen Zeichenbereich üblich ist.



Die Strecke als Teil einer Geraden. Soll man die Trägergerade immer dazu zeichnen? Was spricht dafür, was eventuell dagegen?



Welche Darstellung der Streckenendpunkte scheint zweckmäßig? Aus der Schreibweise $]a,b[$ bzw. $[a,b]$ ist bekannt, dass man offene und geschlossene Intervalle unterscheidet, d.h. dies könnte man bei Strecken ebenfalls einfließen lassen, was es sinnvoll erscheinen lässt, dass man dann für Punkte den vollen und den hohlen Kleinkreis als Unterscheidungsmerkmal heranzieht.

Abb. 14 Darstellung und Bezeichnung einer Strecke

Der Umgang mit mathematischen Programmen spricht für eine funktionelle Verwendung der Objekte. $l(s)$ für Länge einer Strecke, wobei s die Bezeichnung für das Objekt Strecke ist. Die Strecke ihrerseits hängt etwa von den Endpunkten A und B ab $\Rightarrow ST(A,B)$. In jedem Fall ist eine diesbezügliche Vereinbarung notwendig.

3.3. der Strahl

Gibt es für die Halbgerade eine vernünftige Schreibweise? $s(A,B)$, wobei hier die Reihenfolge der Parameter besonders wichtig ist, weil A der Anfangspunkt und der Strahl über den Punkt B hinaus gezeichnet wird.

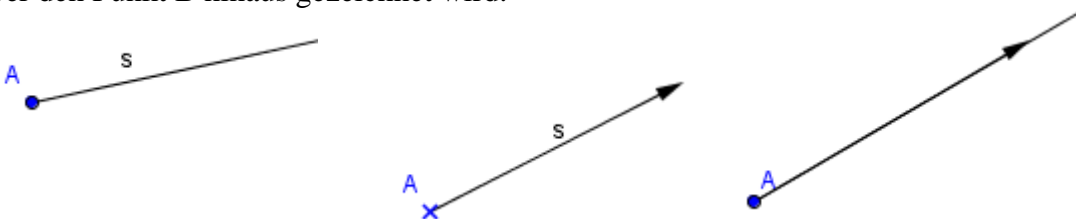


Abb. 15 wie soll ein Strahl korrekt dargestellt und beschriftet werden?

Wie soll die unendliche Fortsetzung markiert werden? Verwechslung mit Vektoren liegt auf der Hand, ein Umstand, der in der Unterstufe allerdings weniger ins Gewicht fällt.

3.4. die Gerade

Wie soll man eine Gerade durch zwei Punkte festlegen:
 $g(A,B)$ oder $g(AB)$ oder $_{A}g_{B}$

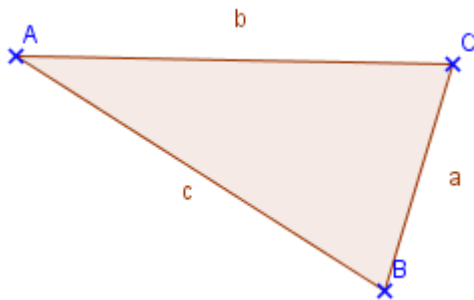


Abb. 16 wie kann die Unendlichkeit von Geraden vernünftig angedeutet werden?
 Soll die Unendlichkeit mit Pfeilspitzen angedeutet werden? Ist eine Idee der Unendlichkeit ohne weitere grafische Pointierung zumutbar?

3.5. das Dreieck

Auch für das Dreieck findet man unterschiedliche Schreibweisen:

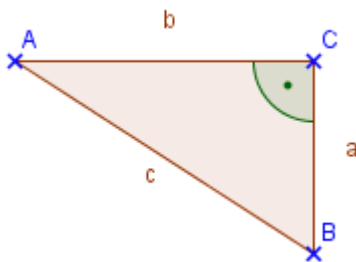
$DE(A,B,C)$ oder ΔABC oder nur ABC ?



Im Prototyp eines Dreiecks ist es üblich, dass eine Seite und der gegenüberliegende Eckpunkt mit dem selben Buchstaben benannt werden.

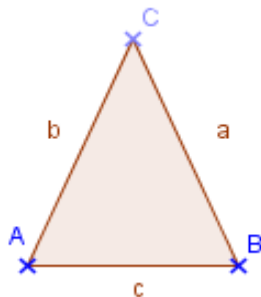
Abb. 17 Dreiecksbenennungen

Wie sieht die Situation bei speziellen Dreiecken wie rechtwinkeligem, gleichschenkeligem oder gleichseitigem Dreieck aus?



Soll der rechte Winkel immer in der Ecke C sitzen?

Abb. 18 rechtwinkeliges Dreieck



Soll die Basis immer AB sein? Sollen gleich lange Seiten unterschiedlich benannt werden?

Die geometrischen Softwareprogramme tun dies, weil die Objekte für die Programmlogik eine eindeutig unterscheidbare Bezeichnung benötigen. In GeoGebra etwa wird im Hintergrund der Bezeichnung a dann doch die Länge zugewiesen.

Abb. 19 gleichschenkeliges Dreieck

3.7. das Viereck

Wie schreibt man am besten: $VE(ABCD)$ oder $VE(A,B,C,D)$? Mit den Beistrichen ist klar erkennbar, dass die Funktion VE vier Parameter in einer bestimmten Reihenfolge als Input erhält. Was passiert, wenn ich in dieser Logik $VE(A,C,B,D)$ schreibe?

Der Flächeninhalt wird in vielen Büchern mit A bezeichnet, was Verwechslungen mit dem Eckpunkt A geben kann; deshalb bietet sich $Area(A,B,C,D)$ oder kurz $Ar(A,B,C,D)$ an.

In der interaktiven Geometrie kann durch Ziehen mit der Maus aus einem allgemeinen Viereck ein Quadrat dynamisch hergestellt werden:

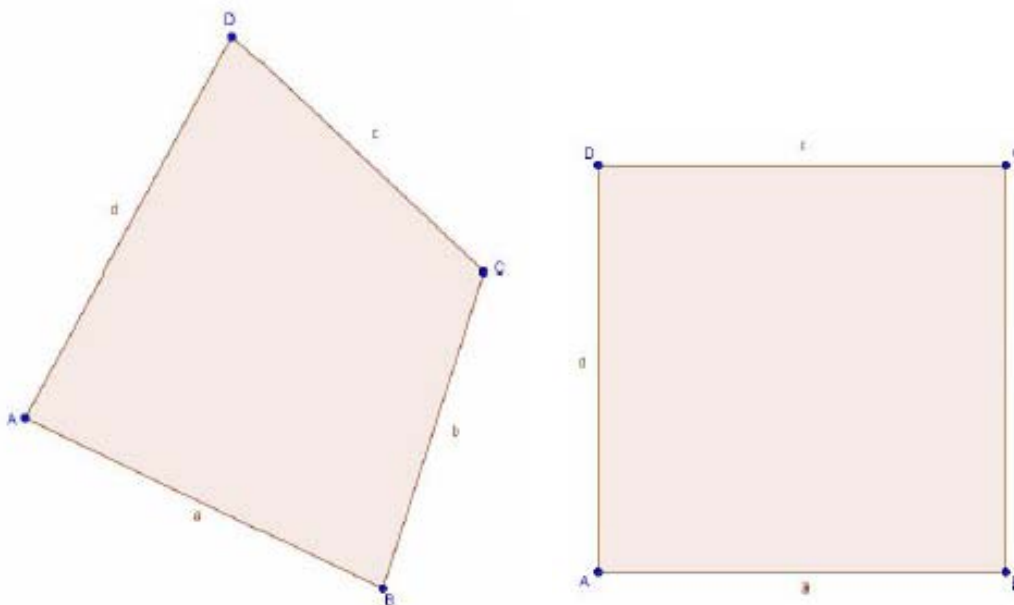


Abb. 23 dynamisch orientierte Geometrieprogramme bezeichnen keine zwei Objekte mit gleichem Symbol

In solchen Programmen lassen sich zwei Seiten gar nicht mit dem selben Buchstaben benennen. Darum bleiben auch bei einem Quadrat die Seitenbezeichnungen bei a, b, c, d . Nur die Länge der vier Seiten ist dann gleich, d.h. genau besehen gilt dann $l(a)=l(b)=l(c)=l(d)$ oder $|a|=|b|=|c|=|d|$ je nachdem, welche Schreibweise man für den Streckeninhalt wählt.

Rechteck: $RE(A,B,C,D)$ und Flächeninhalt $Ar(RE)$ oder $Ar(l,b)$.

Quadrat: $QU(A,B,C,D)$ und Flächeninhalt $Ar(QU)$ oder $Ar(a)$.

In jedem Fall ist die funktionelle Sicht die Grundlage für die Form. Was unterscheidet aber ein Quadrat von einem Rechteck? Handelt es sich dabei um zwei verschiedene Figurentypen?

Irrtümer im Umgang mit Rechteck und Quadrat bestehen bei SchülerInnen oft in der Tatsache, dass die Figuren als Angehörige zweier verschiedener Klassen¹ betrachtet werden, obwohl es sich in Wahrheit um eine Teilmengenrelation handelt: $QU \subseteq RE$

¹ Die Einteilung einer Menge in Klassen erfolgt so, dass je zwei Klassen disjunkt sind und alle Klassen zusammen die Grundmenge ergeben.

Rechteck	Quadrat
4 rechte Winkel	4 rechte Winkel
2 Paare gleich langer, gegenüber liegender Seiten	Alle Seiten sind gleich lang
Diagonalen sind gleich lang	Diagonalen sind gleich lang
	Diagonalen stehen aufeinander normal
Umfang: $2(a + b)$	Umfang: $4a$
Fläche: $a \cdot b$	Fläche: a^2

Wie bringt man zum Ausdruck, dass ein Quadrat auch ein (spezielles) Rechteck ist?

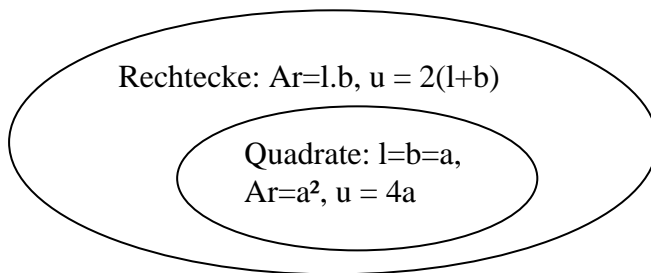


Abb. 24 die Menge der Quadrate ist eine Teilmenge der Menge der Rechtecke

Wenn man dennoch zwischen einem typischen „Quadrat“ mit vier gleich langen Seiten und einem typischen „Rechteck“ mit zwei verschiedenen langen Seiten unterscheidet, was ja in manchen Situationen notwendig ist, wenn man etwa quadratische und nicht rechteckige Fliesen bestellen will, dann wählt man nicht das Mengenmodell, sondern hat jeweils einen Prototypen vor dem geistigen Auge. Die Sicht auf den Prototypen rechtfertigt zwar die Trennung zweier Objekte hinsichtlich ihrer Eigenschaften, aber die Teilmengenrelation muss dabei ja nicht aufgegeben werden.

3.8. das Koordinatensystem

In vielen Grundschulbüchern wird das Koordinatensystem folgendermaßen mit Pfeilspitzen markiert:

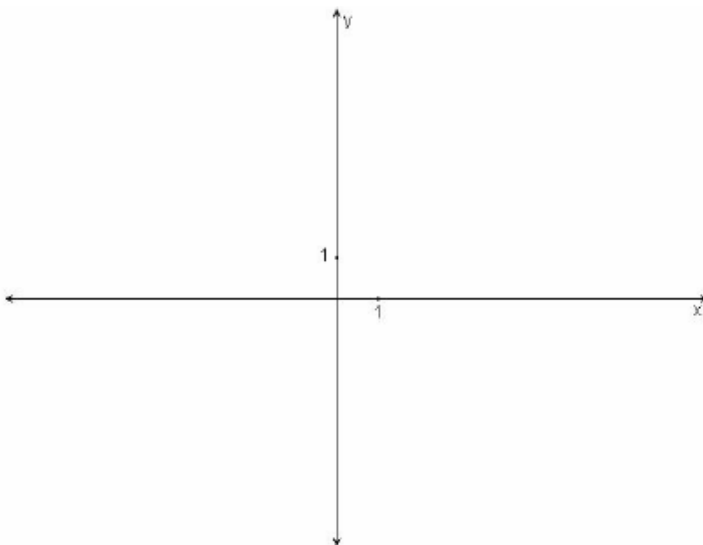


Abb. 25 das kartesische Koordinatensystem mit der Windrosenmarkierung

Gegen diese Art der Markierung spricht die Tatsache, dass in der Ordnungsrelation z.B. auf der x-Achse alle Punkte, die weiter links liegen, kleiner sind als jene, die weiter rechts liegen. Die Pfeilspitze am negativen Achsenende widerspricht diesem Beziehungsmuster. Außerdem sieht es so aus, als würde das Koordinatensystem aus vier Strahlen bestehen. Es ist also zu überlegen, ob das Koordinatensystem nicht von Beginn an so wie in Abb. 26 eingeführt und beschriftet wird:

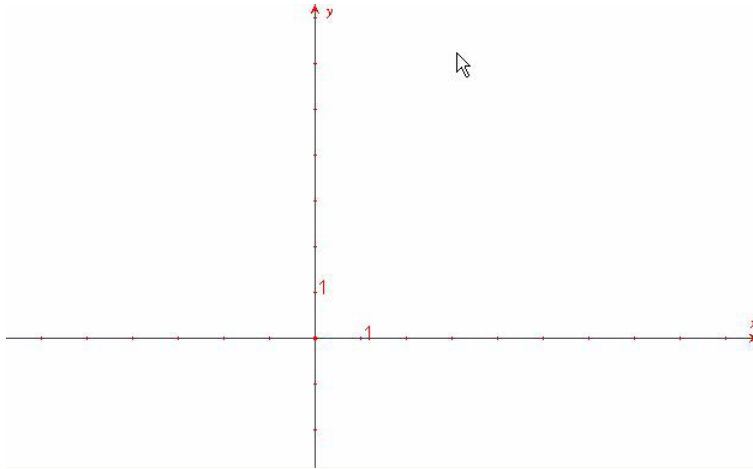


Abb. 26 Markierung entsprechend der Ordnungsrelation auf der Zahlengerade mit Beschriftung der Längeneinheiten

Bei der Einführung des Zahlenstrahls bzw. der Zahlengerade muss man bereits in Vorbereitung auf das Koordinatensystem diesen Sachverhalt berücksichtigen und ebenfalls eine korrekte Markierung und Beschriftung vornehmen. Um anzudeuten, dass die negativen Zahlen auf der Zahlengerade von minus unendlich „herkommen“, könnte man eine Pfeilspitze anbringen, welche die Orientierung von minus nach plus hat.

Noch eine Bemerkung zum Koordinatensystem. Es bietet eine hervorragende Möglichkeit, die Multiplikation von ganzen (spez. negativen) Zahlen zu veranschaulichen, weil es mit den vier Quadranten und den zugehörigen Koordinatenvorzeichen die Möglichkeit von orientierten Flächen gibt.

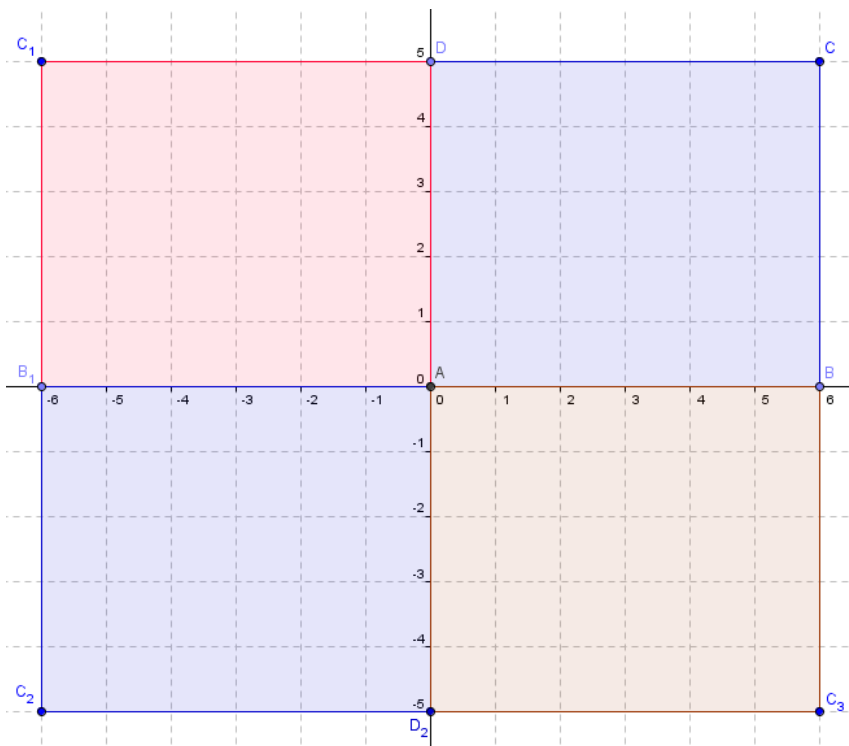


Abb. 27 das Koordinatensystem mit orientierten Flächen

Es gibt orientierte Strecken(Vektoren), orientierte Halbgeraden (Strahlen), orientierte Winkel, bei Dreiecken bzw. Vielecken einen Umlaufsinn, gleich- und gegensinnige Figuren, was liegt folglich näher als auch bei Flächen von Orientierung zu sprechen. Man denke dabei an das bestimmte Integral, wo sich das Vorzeichen ändert, wenn man die Integrationsrichtung ändert oder Flächenteile vor sich hat, die unterhalb der x-Achse liegen. In Abb.27 kann man die Rechteckflächen in den einzelnen Quadranten je nach Orientierung der Seiten positiv oder negativ belegen. Über diesen Weg kann man auch die Multiplikation von ganzen Zahlen ohne viel Aufwand einführen und erklären:

- I. Quadrant Umlaufsinn ABCD: $(+6) \cdot (+5) = +30$
- II. Quadrant Umlaufsinn ADC₁B₁: $(-6) \cdot (+5) = -30$
- III. Quadrant Umlaufsinn AB₁C₂D₂: $(-6) \cdot (-5) = +30$
- IV. Quadrant Umlaufsinn AD₂C₃B: $(+6) \cdot (-5) = -30$

In diesem Zusammenhang werden die Vorzeichenregeln wie etwa „minus mal minus ist plus“ einsichtig, während diese in der problematischen Klammerregel von Abb.11 nicht angebracht ist.

4 **Schlußbemerkung**

Die Sachanalyse des Lehrers verlangt ein hohes Maß an Exaktheit, weil so manche didaktische Entscheidung und Maßnahme davon abhängt. Ist das Minuszeichen z.B. ein Operationszeichen, ein Vorzeichen oder gar nur ein einstellige Umpolfunktion. Die Umsetzung im unterrichtlichen Alltag verlangt hingegen oft einen intuitiven Zugang, wenn man die SchülerInnen selbst entdecken und experimentieren lässt. Manche der im Text gestellten Fragen – speziell zu Bezeichnungen und Benennungen von geometrischen Objekten – sind bewusst offen gelassen, weil sie aus unserer Seite nicht per Vorschrift sondern nur in der konkreten Unterrichtstätigkeit als überlegenswerte Maßnahme zu entscheiden sind. Die angeführten Beispiele sollten aber auch zeigen, wann eine Präzisierung für die SchülerInnen angebracht ist und wann nicht. Mit der Grundregel, dass eine didaktische Entscheidung den SchülerInnen in erster Linie eine Hilfe zum Verständnis und ein Gerüst für sachlich korrekte Grundvorstellungen sein soll, liegt man sicher richtig.

5 **Literatur**

- Gander, Walter [1985]: Computermathematik. Basel/Boston/Stuttgart: Birkhäuser
(Programm-Praxis; Bd.3)
- Ade, Hans /Schell, Hugo [1975]: Numerische Mathematik. Stuttgart: Klett
- Humenberger, J. /Reichel, H.-Ch. [1995]: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Bd.31
Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: BI Wissenschaftsverlag