

## F. Schweiger: CAS und mathematische Eleganz

Sei  $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  ein Polynom vierten Grades. Wir setzen voraus, dass  $p(x)$  zwei verschiedene Wendepunkte besitze. Dann hat die Gerade  $g$  durch die beiden Wendepunkte genau vier Schnittpunkte mit der biquadratischen Kurve. Seien etwa

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

die Abszissen dieser vier Punkte (es ist also  $p''(x_2) = p''(x_3) = 0$ ), dann gilt die überraschende Beziehung

$$\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = G,$$

wo  $G = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  die Zahl des goldenen Schnittes ist.

Im CASIO-Forum (Zitterbart et al. 2009) wird dieser Satz zunächst an einem Beispiel vorgerechnet und sodann der allgemeine Fall mit Hilfe des Rechners verifiziert. Dies zeigt, dass eine elektronische Rechenhilfe einen interessanten Sachverhalt stützen kann und, da es einem Computersystem zugängliche Rechnung ist, auch beweisen kann.

Dem Mathematiker stellt sich die Frage, ob ein so schönes Ergebnis nicht ohne großen Rechenaufwand bewirkt werden kann. Dies ist tatsächlich der Fall! Man überlegt dazu folgende Vereinfachungen

- (i) Durch eine Verschiebung kann man erreichen, dass  $(x_2, p(x_2)) = (0, 0)$  wird (und daher auch  $e = 0$  gilt). Die Gerade  $g$ , auf welcher die vier Punkte  $(x_1, p(x_1))$ ,  $(x_2, p(x_2))$ ,  $(x_3, p(x_3))$  und  $(x_4, p(x_4))$  liegen, geht durch den Nullpunkt  $(0, 0)$ .

(ii) Die affine Abbildung

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= -\frac{p(x_3)}{x_3}x + y \end{aligned}$$

bildet diese Gerade  $g$  in die Gerade  $Y = 0$  ab.

Die Kurve

$$y = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

ist in den neuen Koordinaten

$$Y + \frac{p(x_3)}{x_3}X = X^4 + bX^3 + cX^2 + dX,$$

also

$$Y = X^4 + bX^3 + cX^2 + \left(d - \frac{p(x_3)}{x_3}\right)X =: P(X).$$

Da man für die Polynomfunktion

$$p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

ohne große Mühe

$$p''(x) = 12x^2 + 6bx + 2c$$

errechnet und ebenso für

$$P(X) = X^4 + bX^3 + cX^2 + \left(d - \frac{p(x_3)}{x_3}\right)X$$

die Gestalt

$$P''(X) = 12X^2 + 6bX^2 + 2c$$

erhält, werden die Wendepunkte  $(x_2, p(x_2)) = (0, 0)$  und  $(x_3, p(x_3))$  auf die Wendepunkte  $(X_2, P(X_2)) = (0, 0)$  und  $(X_3, P(X_3)) = (x_3, 0)$  abgebildet.

Es sei angemerkt, dass diese affine Abbildung Wendepunkte auf Wendepunkte abbildet, aber die Lage des Maximums und der beiden Minima verändert. Die lokalen Extreme sind die Punkte, wo die Tangente parallel zur x-Achse ist. Für die Bildkurve sind es die Punkte, deren Tangente (ursprünglich) parallel zu  $g$  läuft!

Wir können daher nun annehmen, dass die Gerade  $g$ , die durch die beiden Wendepunkte geht, die Gerade  $y = 0$  ist und  $x_1 < x_2 = 0 < x_3 < x_4$  die Abszissen der Schnittpunkte von  $g$  mit der Kurve  $y = p(x)$  sind.

Da  $x_2$  und  $x_3$  Wendepunkte sind, gilt wie schon bemerkt die Beziehung

$$p''(x_2) = 0$$

und

$$p''(x_3) = 0.$$

Da  $x_2 = 0$  gilt, ist  $c = 0$  und  $b = -2x_3$ .

Nach den Formeln von Viète ist weiters

$$d = -x_1x_3x_4.$$

Das Polynom lautet daher

$$p(x) = x^4 - 2x_3x^3 - x_1x_3x_4x.$$

Da  $x_4$  Nullstelle ist, erhalten wir

$$x_4^4 - 2x_3x_4^3 - x_1x_3x_4^2 = 0,$$

also

$$x_4^2 - 2x_3x_4 - x_1x_3 = 0.$$

Da  $b = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -2x_3$  und  $x_2 = 0$ , ist  $x_1 = x_3 - x_4$ .

Setzen wir dies oben ein, erhalten wir

$$x_4^2 - x_3x_4 - x_3^2 = 0.$$

Dies ist aber äquivalent zu

$$\left(\frac{x_4}{x_3}\right)^2 = \frac{x_4}{x_3} + 1.$$

Daher ist  $\frac{x_4}{x_3} = G$ , wie behauptet.

Da ja  $x_4 = x_3 - x_1$ , folgt sofort auch

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3} = G.$$

Zugegeben, ein bisschen listig, aber es soll beides in der Mathematik Platz haben: Kalkül und Suche nach eleganten Lösungen.

Übrigens, es ist gut möglich, dass dieser Beweis schon in der Literatur zu finden ist, aber warum lange suchen, was nicht so schwer erscheint.

## Literatur

Zitterbart, Arnold u. a. 2009: Polynome 4. Grades und der Goldene Schnitt. CASIO - Forum 1 (2009), 1-2.