

Fritz SCHWEIGER

Rechnen und Operieren

1 Einleitung

Wenn man sich als Mathematiker und Fachdidaktiker zum Handlungsbereich *Rechnen-Operieren* äußern soll, ist die Gefahr sehr groß, dass eine Aufzählung von mathematischen Verfahren entsteht, die Schüler(innen) können sollten, wobei es an solchen Katalogen ohnehin nicht mangelt. Man könnte auch versuchen, das intendierte Konzept in zahlreiche Aufgaben zu übersetzen, wobei man ja bestehende Aufgabenplantagen nur durchsehen müsste. Da ich aber überzeugt bin, dass lebendiger Unterricht durch eine Erschließung (altbekannter) Ideen entstehen kann, habe ich den Weg eines Essays gewählt. Der theoretische Hintergrund ist in der Erforschung der Fundamentalen Ideen der Mathematik für die Didaktik zu finden (Schweiger 2006a, 2006b). Eine Kurzformel dazu ist: „Lehre Ideen, d.h. geistige Inhalte, die hinreichend vage sind, um zu individueller Aneignung einzuladen“ (Jung 1978, S. 170). Für weitere pädagogische und didaktische Aspekte sei auf Führer 1997 und Vollrath 2001 verwiesen. Die Wichtigkeit einer soliden Grundlage auf diesem Gebiet wurde erst jüngst von Gaidoschik 2008 in Erinnerung gerufen.

2 Zahlbereiche

Die Erschließung der Zahlreihe ist eine grundlegende Tätigkeit der menschlichen Kultur, vergleichbar und verwandt mit den Grundfertigkeiten des Sprechens und Verstehens, des Schreibens und des Lesens. Die enge Beziehung zwischen Sprache und Mathematik wird in Maier & Schweiger 1999 dargestellt. Am Anfang steht der Erwerb der ersten Schritte in Richtung natürlicher Zahlen. Die Zählzahlen 1,2,3,4,... werden wohl zuerst als *sprachliche Elemente* gelernt. Die Verbindung mit *Zählhandlungen* folgt nahezu gleichzeitig

oder anschließend. Erst relativ spät ist die Verbindung mit *Vergleichshandlungen* anzusetzen. Wesentlich für diese erste Stufe ist der Aufbau einer Zahlreihe, die durch Synthese von Teilstücken und Auffüllen der Lücken gewonnen wird.

Nicht zu vergessen ist, dass Kinder sehr früh mit der α -numerischen oder quasi- α -numerischen Verwendung von Zahlen konfrontiert werden: „Zum Freibad geht die Linie 22“ oder „Oma kommt mit dem Neun-Uhr-Zug“.

Der nächste Schritt ist der sukzessive Fortschreiten auf der Zahlreihe sprengende multiplikative Aufbau der Zahlreihe. Es kommen die Zehner, Hunderter und Tausender. Die Kenntnis von 80, 900 oder 2000 überspringt den linear fortschreitenden Aufbau. Das Auffüllen allfälliger Lücken geschieht durch die Regeln der Sprache: Ein Kind kann (ab einem gewissen Alter) die Bedeutung der Zahl 165 verstehen ohne das entsprechende Zahlwort vorher gehört oder gelesen zu haben! Auch hier ist die quasi- α -numerische Verwendung von Zahlen wichtig. Das Kind lernt früher, dass ein Zehneuroschein mehr wert ist als eine Euromünze ohne dass es das Verhältnis 10:1 genau versteht. Letztlich geht es ja auch vielen Erwachsenen so: Verspekulierte Verluste von zwei Milliarden Euro sind einfach riesig!

Das (multiplikative) Prinzip der Bündelung ist die Strategie zur Bewältigung (und zugleich Verschleierung) der Zahlreihe. Nach Tausend kommen neue Wörter wie Million, Milliarde, Billion... Die korrekte Versprachlichung der natürlichen Zahlen ist eine große kognitive Leistung und sollte nicht unterschätzt werden!

Diese Bündelung wird parallel bei den Größen aufwärts und abwärts vorgenommen:

- Meter, Kilometer...
- Dezimeter, Zentimeter, Millimeter, Mikrometer...

Die Ausdrücke 1 Lichtjahr ($\sim 9,4608 \cdot 10^{15} m$) oder 1 Nanometer ($= 10^{-9} m$) weisen aber eher auf die vorhin angedeutete Tendenz der Verschleierung hin, denn in beiden Fällen wird die Vorstellungskraft

(zu?) stark beansprucht und nur Kundige [Astronom(inn)en, Physiker(innen)...] können damit etwas anfangen. Die Potenzschreibweise 10^x ist darum früh in den Vordergrund zu stellen. Eine Angabe wie $5 \cdot 10^4$ ist im Allgemeinen der (genaueren?) Angabe 51312 vorzuziehen. Diese multiplikative Bündelung bereitet Kindern und Jugendlichen keine großen Schwierigkeiten, wie die Verwendung von Kilobyte (=1024 Byte), Megabyte und Gigabyte zeigt, wenn auch hier eher mit einem quasi- α -numerischen Verständnis zu rechnen ist: Ein Speichermedium mit 2 Gigabyte fasst wesentlich mehr als eine mittelalterlich anmutende Diskette mit 2 Megabyte. Der kleine Unterschied zu Watt, Kilowatt (=1000 Watt) und Megawatt sollte aber zumindest erwähnt werden!

Neben dem Aufbau der Zahlreihe, die vom Zählen zu großen Zahlenräumen geführt hat, folgt sehr früh ein merkwürdiger Schritt in die Gegenrichtung, die Erfindung von Bruchzahlen, die vor allem den Raum zwischen 0 (die Zahl 0 ist ein Kapitel für sich!) und 1 auffüllen sollen. Der Grund hierfür dürfte denkökonomisch sein: die Aufteilung einer Einheit nach einem einheitlichen Schema ist ökonomischer als die ständige Erfindung neuer Einheiten: Ein Drittel einer Pizza, ein Viertel Liter Milch, ein halber Meter... Dabei hat es auch Versuche gegeben, durch neue Einheiten diesen Prozess zu umgehen, und einige Reste sind kulturgeschichtlich geblieben: 60 Sekunden bilden eine Minute und 60 Minuten eine Stunde. Der Sport verwendet dann aber (konsequent) Zehntel- und Hundertstelsekunden. Bei der ständigen Inflation braucht man gerade noch 100 Cents = 1 Euro.

Auch das Rechnen mit Prozenten und Promillen ist eher ein kulturgeschichtlicher Ballast. Das Leben wäre für Schüler(innen) einfacher, wenn man konsequent schreiben würde „Der Zinsgewinn bei diesem Sparbuch ist 0,05“ statt „Die Zinsen bei diesem Sparbuch sind 5%“ (die zweite Formulierung ist aber sicher publikumswirksamer!).

Jedenfalls kann man im Bild sagen: Der Aufbau der Bruchzahlen bedeutet keine Erweiterung der Zahlenreihe sondern eine „Verdichtung nach innen“.

Eine große Schwierigkeit ist es, den Übergang von Bruchzahlen zu rationalen Zahlen zu gestalten. Zwei $1/8$ -Pakete Butter liefern die gleiche Menge wie ein $1/4$ -Paket Butter. Ein halber Zehneuroschein ist leider wertlos und entspricht daher nicht 5 Euromünzen. Die erst in einem passenden Modell sinnvolle und für viele praktische Fragen wichtige Gleichsetzung

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

sollte mit dem Handlungsbereich *Darstellen-Modellbilden* eng vernetzt werden, sofern man nicht die Alternative „Mathematik durch Verordnung“ (ab heute ist $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$) vorzieht. Man sollte leistungsschwächeren Schüler(inne)n aber diesen Weg anbieten.

Die Umwandlung rationaler Zahlen in Dezimalbrüche hat mindestens zwei didaktische Vorteile. Man kann anhand der Darstellung

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots$$

zeigen, dass das Rechnen mit Dezimalbrüchen mit Rundungsfehlern behaftet ist (eine leise Mahnung an einem unkritischen Einsatz elektronischer Rechner kann hier Platz haben) und man kann reelle Zahlen vorbereiten. Hinweise auf die schon in der Antike erfolgte (philosophische) Erschütterung, dass die Einführung rationaler Zahlen die Zahlengerade noch immer nicht „dicht“ genug macht, müssen wohl der Sekundarstufe II überlassen bleiben. Es genügt wohl zu wissen, dass man genügend viele Dezimalstellen von $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ finden

kann, um mehr oder minder alle praktischen Probleme genügend genau zu berechnen. Das babylonische Wurzelziehen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

bietet sich dazu an. Dass dieses Verfahren keine periodische Entwicklung aufdeckt (und somit $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist), kann getrost mitgeteilt werden. Es ist aber denkbar, leistungsstarken Schüler(inne)n einen Beweis der Irrationalität anzubieten.

Neben Quadratwurzeln und allenfalls Kubikwurzeln ist es vor allem die Kreiszahl π , an der man nicht vorbei kann. Jeder wird verstehen, dass man in einer High-Tech-Kultur nicht immer mit $\frac{22}{7}$ auskommen kann, sondern eben bessere Näherungswerte braucht.

3 Rechnen

Da Schüler(innen) auf das Leben vorbereitet werden sollen, ist die Konvertierung zwischen verschiedenen Darstellungen von Zahlen und Maßen unabdingbar. Die Uhr verlangt weiters von Schüler(inne)n ein gewisses Maß an modularer Arithmetik (modulo 12 oder modulo 24), denn 5 Stunden nach 9 Uhr Vormittag ist es 2 Uhr Nachmittag. Auch die jährliche Verschiebung der Wochentage (modulo 7) ist interessant (besonders, wenn ein Schaltjahr noch dazu kommt), aber letztlich nicht Stoff eines Standards-Konzepts.

Jedenfalls bedeutet *Rechnen* nicht nur die Durchführung elementarer Rechenoperationen (einschließlich der weitgehend konventionellen Schreibregeln, des zweckmäßigen Anschriebs bei schriftlicher Multiplikation oder des Setzens und Auflösens von Klammern), sondern sollte das Verständnis des Aufbaus der Zahlbereiche in ihrem kulturellen Kontext umfassen. Im (österreichischen) Standards-Konzept wird auch die syntaktische Umformung von Symbolketten

zum Rechnen gezählt, das bedeutet die symbolische Abstraktion von Rechnungen im Sinne der elementaren Algebra. Schüler(innen) sollten einfachen Beziehungen wie

$$a + b = b + a$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot c$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

einen Sinn zuschreiben können (verbal oder exemplarisch durch Einsetzen). Aufgaben wie

$$\text{„Vereinfache } \frac{2x-y}{2x-2y} - \frac{x-y}{3x+3y} + \frac{y(3y-x)}{3x^2-3y^2} \text{“}$$

sind aber entbehrlich, da sie keinen nennenswerten Beitrag zu den wünschenswerten Standards leisten. Eine Aufgabe wie

„Berechne f aus der Beziehung

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = A \text{“}$$

ist als sinnvoll anzusehen, vor allem, wenn im Sinne des *Operierens* etwa eine Tabelle der Zahlen A und g gegeben ist und die Ergänzung mit dem fehlenden Wert von f durch ein Verfahren (z. B. Tabellenkalkulation) vorgenommen werden soll.

Die Durchführung der Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sollte sinnvoll möglichst früh mit der Abschätzung der Ergebnisse bzw. mit sinnvollen Rundungsverfahren kombiniert werden. Dies entspricht auch dem angedeuteten Aufbau der Zahlbereiche durch das Errichten von Brückenpfeilern (Stichwort Bündelung) und erst nachträglichem Auffüllen der Lücken. Schon die Aufgabe

$$18 \cdot 23 = ?$$

kann mit $20 \cdot 20 = 400$ kombiniert werden. Das Arbeiten könnte dann mit

$$18 \cdot 20 = 360$$

$$20 \cdot 23 = 460$$

$$18 \cdot 23 = 414$$

fortgesetzt werden. Es geht dabei nicht um Einschränkungen, sondern um ein spielerisches Gewinnen von Größenordnungen.

Das Potenzieren sollte zwei Bereiche abdecken. Einerseits den geometrischen Bereich, wo a^2 und a^3 als Flächeninhalte und Volumina auftreten (und dann sinnvoll zu \sqrt{a} und $\sqrt[3]{a}$ hinführen), andererseits den Bereich der Zahldarstellungen

$$0,035 = 3,5 \cdot 10^{-2}$$

$$4\,189\,000 = 4,189 \cdot 10^6.$$

Die Normierung auf eine Stelle vor dem Komma ist sinnvoll und wahrscheinlich für die Wahrnehmung wichtig. Sie ist gelegentlich etwas irreführend, wie das Beispiel 1kg Faschiertes für 5,99 € zeigt, wo man eben wahrnimmt, der Preis sei 5€ und ein bisschen mehr! Im Umkreis des Satzes von Pythagoras kann es ganz lustig sein $5^2 + 12^2 = 169 (=13^2)$, d.h. $\sqrt{169}$ zu bearbeiten. Ansonsten wird man das Ausrechnen von Quadrat- und Kubikwurzeln dem Rechengerät überlassen. Hier ist allerdings eine sorgfältige Kontrolle des Kommas notwendig!

Die Konvertierung bzw. Umrechnung von Maßeinheiten ist eher lästig und fehleranfällig (hier handelt es sich um *Operieren* im Sinne einer korrekten und effizienten Durchführung), ist aber vor allem in Hinblick auf Berufsvorbildung (Stichwort Anschlussfähigkeit) unerlässlich und kann auch für allerlei Fragen des Alltags hilfreich sein. Eine Aufgabe wie

„1 Zoll entspricht 2,540 cm. Drücke 3/8 Zoll in Meter aus“

im Handlungsbereich *Rechnen-Operieren* sollte lösbar sein. Etwas anspruchsvoller ist es, die Benzinpreise von Österreich (in Euro pro Liter) und den USA (in US-Dollar pro US-Gallon) zu vergleichen. Aus dem genannten Grund sind auch Mischungsrechnungen wichtig.

4 Formeln, Tabellen und Graphiken

Wie die Geschichte der Algebra lehrt, hat es lange gedauert bis der Übergang zu mathematischen Formeln gelungen ist. Auch hier ist die Geläufigkeit mit den wichtigsten Formeltypen wie

$$y = a x + b$$

$$z = x y$$

unerlässlich. Die Formeln sind als Kurzfassung der damit verbundenen Handlungen zu begreifen und der denkökonomische Vorteil für die Lernenden herauszuarbeiten.

Der verständige Umgang mit Tabellen und Graphiken ist ebenso wie die Durchführung elementarer geometrischer Konstruktionen in Zusammenhang mit *Darstellen-Modellbilden* zu sehen. Ein näherer Zusammenhang mit *Rechnen-Operieren* ist vielleicht in folgenden Themen zu erkennen.

- Das Erstellung einer Tabelle oder einer Graphik mit Hilfe einer Formel oder umgekehrt, das Erkennen einer derartigen Formel.
- Geometrische Konfigurationen (z. B. Dreieckszahlen oder Fünfeckszahlen) können zu rekursiven Darstellungen führen.
- Das Erkennen von Mustern ist als mathematische fundamentale Idee an Beispielen vorzuführen, die Kreativität und Freude an der Mathematik betonen (und daher als Prüfungsbeispiele besser auszuscheiden sind).
- Ein Thema könnte auch die geometrische Veranschaulichung von Formeln sein, wie etwa $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ oder das Umfeld des Satzes von Pythagoras.

5 Handlungsbereiche

Die im Standards-Modell vorgeschlagene Trennung in drei Dimensionen *Handeln-Inhalte-Komplexität* ist theoretisch zumindest einleuchtend, aber praktisch schwer durchzuhalten. Vor allem ist das (durch Testitems kontrollierbare) Handeln im Sinne einer Tätigkeit, die zu einem mündlichen oder schriftlichen Output führt, letztlich von den (gedachten) mentalen Tätigkeiten schwer abzugrenzen.

Fraglos legt der Handlungsbereich *Rechnen-Operieren* es nahe, die zu beschreibenden Handlungen zunächst im arithmetischen Bereich anzusiedeln. Es wird aber im bisher vorliegenden Standards-Konzept „elementare geometrische Konstruktionen durchführen“ auch als charakteristische Tätigkeit genannt. Die starke visuelle Komponente dieser Tätigkeit kann auch bedeuten, diese Tätigkeit der Rubrik *Darstellen-Modellbilden* zuzuordnen. Zweifellos enthält aber die Durchführung geometrischer Konstruktionen einen operativen Aspekt, der aus der Durchführung elementarer Operationen und deren Verkettung besteht. Die Konstruktion eines Dreiecks mit den Seitenlängen a , b , c erfordert das Abtragen einer Strecke auf einer Hilfsgeraden, den Gebrauch des Zirkels usw.

Geometrische Konstruktionen sind ja (ähnlich wie das Verwenden von Symbolen) von der Wahrnehmung der Umwelt nicht unmittelbar gefordert. Wohl sind wir umgeben von geometrischen Formen, Figuren und Körpern und klassifizieren sie. Der Freude an der figuralen Darstellung genügt es aber, zu skizzieren, zu zeichnen und zu malen. Der Aspekt der Herstellung erzwingt eine genauere Beachtung geometrischer Konstruktionen, aber da Kinder keine Häuser und Maschinen bauen, ist dieser Aspekt nicht vordergründig. Es ist wohl eher der spielerische Gebrauch der Konstruktionsmittel Lineal, Zirkel und Geodreieck, welcher hilft, diese Welt zu erschließen.

Die Verwendung maßstabsgetreuer Darstellungen ist ein interessantes Bindeglied zwischen Arithmetik und Geometrie. Die Schulung der räumlichen Ausschauung spricht für die Besprechung einfacher

Körper. Die ästhetische Komponente der Mathematik kann im Erkennen und Herstellen von Symmetrien zum Tragen kommen.

Zuletzt werden stichwortartig einige Handlungen aufgezählt. Dem arithmetischen Bereich sind zuzuordnen:

- Den Aufbau der Zahlbereiche verstehen und handhaben
- Versprachlichung und Verschriftlichung von Zahlen
- Umgang mit einfachen Symbolketten
- Arbeiten mit funktionalen Beziehungen (dazu gehört auch die Schlussrechnung)
- Durchführung elementarer Rechenoperationen und deren Auslagerung an technologische Hilfsmittel
- Verstehen und Konvertieren von verschiedenen Zahldarstellungen und Maßeinheiten
- Lösen einfacher Gleichungen und Ungleichungen
- Interpretieren und Verstehen von Graphiken und Tabellen.

Geometrische Aspekte werden einbezogen bei den Themen:

- Wechsel zwischen arithmetischer Aufgabe und geometrischer Visualisierung.
- Verwenden der (noch) gebräuchlichen Konstruktionsmittel: Lineal, Zirkel, Geodreieck
- Herstellen und Interpretieren maßstabsgetreuer Darstellungen
- Übersetzen arithmetischer Beziehungen und visueller Darstellungen.

Literatur

Führer, L. (1997): *Pädagogik des Mathematikunterrichts*. Braunschweig u. a.: Vieweg.

Gaidoschik, M. (2008): „*Rechenschwäche*“ in der Sekundarstufe: Was tun?
In: JMD Jg. 29, Heft 3/4, S. 287-294.

- Jung, W. (1978): *Zum Begriff einer mathematischen Bildung. Rückblick auf 15 Jahre Mathematikdidaktik*. In: *mathematica didactica* 1, S. 161-176.
- Maier, H. & Schweiger, F. (1999): *Mathematik und Sprache*. Mathematik für Schule und Praxis (hrsg. von H.-C. Reichel), Band 4. Wien: öbv&hpt.
- Schweiger, F. (2006a): *Nochmals: Fundamentale Ideen der Mathematik*. In: Schneider, E. (Hrsg.): *Fokus Didaktik. Vorträge beim 16. Internationalen Kongress der ÖMG und Jahrestagung der DMV*. Universität Klagenfurt. München/Wien: Profil Verlag, S. 205-208.
- Schweiger, F. (2006b): *Fundamental Ideas: A Bridge between Mathematics and Mathematical Education*. In: Maaß, J. & Schlöglmann, W. (eds): *New Mathematics Education Research and Practice*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, S. 63-73.
- Vollrath, H.-J. (2001): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.