

„Warum?“ – Einsichten, Argumente und Begründungen im Standards-Modell

1 Einleitung

Am deutlichsten zeigt sich die Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik am Stellenwert, den der Beweis inne hat. Beweisen im strengen Sinn ist eine, wenn nicht die charakteristische Tätigkeit in der Mathematik, mehr noch, in keiner anderen Wissenschaft ist das Beweisen so wie in der Mathematik möglich. Dies begründet u. a. die enge Verknüpfung mit der Philosophie. Als richtig erkannte Beweise sind in alle Ewigkeit gültig, sie haben „ewige Wahrheiten“ begründet, wenn sie nicht im Zuge von Begriffsschärfungen, und/oder Änderungen der zu Grunde liegenden Argumentationsbasen neu überdacht und dann ausformuliert werden müssen. Der Preis für diese Sonderstellung der Mathematik ist (in didaktischer Hinsicht) ein hoher: Die Objekte, deren Zusammenhänge so genau und sicher, weil bewiesen, beschrieben werden können, sind abstrakter Natur, sie existieren nur im menschlichen Geist. Dennoch entwickeln sie oft ein Eigenleben, welches erst nach und nach entdeckt wird. Die Begriffe werden (oft aufgrund schon erkannter Zusammenhänge) erfunden, die Zusammenhänge entdeckt.

Das Abbild dieser eminenten Eigenschaft der Mathematik in der Schule ist bestenfalls ein verzerrtes zu nennen. Das Wort „Beweis“ ist überhaupt verpönt, schon in der Ausbildung der Lehramtskandidat(inn)en an der Universität werden Beweise vor allem als Prüfungshürde gesehen. Diese Sichtweise setzt sich dann – wenn überhaupt – im Unterricht (mit geänderten Rollen) fort und trägt so unter anderem zum negativen Bild des Schulfaches „Mathematik“ bei. Dieser Umstand ist auch deswegen interessant, da bei Befragungen von Mathematiklehrer(inne)n, ob sie im Mathematikunterricht mit

Beweisen arbeiten, oft negative Antworten gegeben werden. Doch könnte vielleicht genau das intensivere Arbeiten mit Beweisen oder Begründungen auf den unterschiedlichsten Niveaustufen zum besseren Verständnis, eigentlich zur tieferen Einsicht der angebotenen Mathematik (beispiele) in der Schule führen.

Nicht nur die Wissenschaft Mathematik an sich ist wegen der Beweise etwas Besonderes, sondern auch das Fach Mathematik zeichnet sich im Fächerkanon dadurch aus: Dieser Unterrichtsgegenstand soll und kann sich von anderen dadurch unterscheiden, dass hier nicht die Autorität oder das (faktische) Fachwissen der Lehrkraft über richtig/falsch entscheidet (wie in künstlerischen Fächern oder Deutsch), oder Experimente wie in den Naturwissenschaften die letzte Instanz auf der Suche nach (der) Wahrheit sind. Hier kann die Schülerin bzw. der Schüler durch Berufung auf mathematische Methoden und Schlussweisen sogar *beweisen*, dass sie bzw. er Recht hat, auch wenn der Lehrer bzw. die Lehrerin etwas anderes sagt. Um dieses dem Fach innewohnende Potential aber auch wirklich im Unterricht nutzen zu können, muss die (schul-)mathematische Tätigkeit des Argumentierens und Begründens – für die Schüler(innen) merkbar, das heißt im Allgemeinen prüfungsrelevant – Einzug in denselben halten.

In der *FURCHE* vom 13. August 2009 (S. 4f.) ist vom Begriff „Keenies“ die Rede, er bezeichnet die Gruppe der 11- bis 14-Jährigen, „noch halb Kind und schon halb Teenager“. Eine Sozialarbeiterin sagt ebenda: „Die Jugendlichen von heute haben mehr Wissen, mehr Information, sie anerkennen Autoritäten nicht mehr so leicht. [...]“ – Das würde ja genau passen: wenn es gelingt, das Fach „Mathematik“ als von *persönlichen Befindlichkeiten* sowie *Interessen* (wie z. B. Machteinflüsse) *unabhängig* zu positionieren (was zugegebenermaßen noch sehr selten im real existierenden Mathematikunterricht passiert), dann könnte das einen (so bitter notwendigen) Attraktivitätsschub des Faches Mathematik auslösen. *Abstraktion als Befreiung*, diesen Gedanken gilt es in diesem Zusammenhang als (auch) für die Mathematik charakteristisch zu etablieren, das Monopol der künstlerischen, kreativen Fächer darauf aufzubrechen.

2 Der Handlungsbereich „Argumentieren, Begründen“

Der (A)HS-Lehrplan bzw. der für die kooperative Mittelschule (KMS) und auch das Kompetenzmodell M8 der Bildungsstandards sieht die mathematische Grundtätigkeit des Beweisens bzw. die damit eng verwandten Aktivitäten, das Argumentieren und Begründen, vor. Sie sollten auch in der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik eine gewisse Rolle spielen.

Im derzeit gültigen Lehrplan für Allgemein Bildende Höhere Schulen und Hauptschulen bzw. KMS in Österreich wird im Abschnitt *Bildungs- und Lehraufgabe* gefordert, dass Schüler(innen) „in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen“ (Lehrplan 2000, S. 1) sollen.

Der Abschnitt *Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte* erläutert die mathematische Grundtätigkeit des Argumentierens und exakten Arbeitens als „präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen); Arbeiten mit logischen Schlussweisen; Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform)“ (Lehrplan 2000, S. 1).

Im aktuellen Papier des Österreichischen Kompetenzzentrums für Mathematikdidaktik, welches das derzeit gültige Standards-Modell für die 8. Schulstufe beschreibt, wird von der „Mathematik als Denktechnologie“ gesprochen, die mit ihren Verfahren und Werkzeugen zur Lösung von (mathematisch modellierten) Problemen beiträgt (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 7). „Mathematische Standards, die sich an der Lebensvorbereitung orientieren, werden sich also nicht auf operative Aspekte der Mathematik beschränken können, sondern auch konstruktive (z. B. Modellbilden) und vor allem kommunikative Aspekte der Mathematik (etwa Darstellen, Interpretieren, Begründen) in den Blick nehmen müssen, diese reflektieren und vernetzen“ (Heugl & Peschek 2007, S. 7).

In der Tat stellt gerade der Bereich des Argumentierens und Begründens einen wesentlichen Aspekt (auch) zwischenmenschlicher Kommunikation dar. Es wird dabei zum einen meist auf eine *Zusammenhang stiftende* Funktion Wert gelegt, welche zu einem besseren Verständnis eines Sachverhalts, zu einer tieferen Einsicht in ihn führen soll. Zum anderen sei hier auch noch die *Überzeugungsfunktion* einer Argumentation genannt, es soll also jemand von der Richtigkeit einer Behauptung überzeugt werden (vgl. Götz & Sattlberger 2007, S. 102, nach Malle 2002, S. 4). Prinzipiell ist zur Kommunikationsfähigkeit vor allem ein gewisses Maß an Grundwissen und Reflexionswissen erforderlich. Schule hat die Aufgabe diese Kommunikationsfähigkeit [mit Expert(inn)en und mit der Allgemeinheit] herzustellen (vgl. Fischer 2003, S. 561), eine Fähigkeit, für deren Ausbildung natürlich nicht alleine der Mathematikunterricht zuständig ist.

Betrachtet man die Formulierung der mathematischen Kompetenzen, welche Schüler(innen) im Rahmen des Standards-Modells am Ende der 8. Schulstufe beherrschen sollen, so findet sich im Handlungsbereich „Argumentieren, Begründen“ (H4) eine relativ genaue Beschreibung der zugehörigen Kompetenzen:

„*Argumentieren* meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache. *Begründen* meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/Entscheidungen führt“ (Heugl & Peschek 2007, S. 12). Als charakteristische Tätigkeiten werden beispielhaft das Nennen von mathematischen Argumenten, das argumentative Belegen von Entscheidungen für bestimmte Lösungswege, das Formulieren von mathematischen Vermutungen und das Herleiten bzw. Beweisen von mathematischen Zusammenhängen (Formeln, Sätzen) genannt (ebenda, S. 12).

Auch in der Komplexitätsdimension wird das Argumentieren und Begründen zweifach genannt. Die höchste Komplexitätsstufe K3 (Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren) meint (u. a.) „das Nachdenken über (vorgegebene) Interpretationen, Argumentationen oder Begründungen“ bzw. soll Reflexion(swissen) „durch Dokumentation von Lösungswegen, durch entsprechende Entscheidungen, oft aber auch durch entsprechende Argumentationen und Begründungen“ sichtbar werden (Heugl & Peschek 2007, S. 14). Die Komplexitätsbereiche 1 und 2 beinhalten die Begriffe Argumentieren und Begründen nicht.

3 Zugehörige Aufgabenbeispiele aus dem Klagenfurter Standards-Modell

Zur Konkretisierung der Bildungsstandards werden Aufgabenbeispiele im Klagenfurter Kompetenzmodell angeführt, die einerseits im Sinne einer Outputsteuerung und Outputkontrolle als normative Instrumente konzipiert sind, andererseits den Lehrer(inne)n Hinweise darüber geben sollen, über welche fachlichen Kompetenzen ihre Schüler(innen) konkret verfügen sollen (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 15f.).

Im Folgenden werden die Aufgabenbeispiele des Standards-Papiers dahingehend analysiert: Erstens in welchem Ausmaß werden Argumentationen und Begründungen in den Orientierungsaufgaben behandelt? – Und zweitens welche Formulierungen bedingen in den Fragestellungen welche Lösungsmöglichkeiten?

Betrachtet man jene Aufgabenbeispiele, welche einerseits der Handlungsdimension 4 (Argumentieren, Begründen) und/oder andererseits der Komplexitätsstufe 3 (Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren) angehören, so ergibt sich eine Teilmenge von 24 Aufgabenbeispielen (von insgesamt 48), die der Thematik des Begründens zugeordnet werden können.

Die Hälfte dieser Beispiele ist durch das Ankreuzen von einem/r oder mehreren (korrekten) Lösung(en) bzw. Lösungsweg(en) zu

beantworten¹. Diese Beispiele sind alle der Komplexitätsstufe 3 zugeordnet und sollen die Schüler(innen) zum Nachdenken über Argumentationen bzw. die Entscheidung der Richtigkeit einer Argumentation oder Begründung anregen. Die vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten unterscheiden sich oft nur in geringem Maße und verlangen ein genaues Lesen des Textes, wogegen nichts einzuwenden ist. Der „Erratefaktor“ der richtigen Lösung kann bei derartigen Beispielen aber nicht ausgeschlossen werden, ein Argument, welches bei der Verwendung derartiger oder ähnlicher Beispiele in Testungen unbedingt berücksichtigt werden sollte. In diesem Zusammenhang sei zudem die große Diskrepanz im Abschneiden bei Testungen (z. B. den Eignungstests für medizinische Studien in den Jahren 2006 und 2007) zwischen Mädchen und Jungen bedingt durch bestimmte Testformate erwähnt.

Die andere Hälfte der Beispiele verlangt von den Schüler(inne)n verbale Formulierungen als Antworten. Dabei werden die Schüler(innen) in unterschiedlicher Weise aufgefordert mathematische Aussagen zu zeigen (*Potenzen, Arithmetisches Mittel*), zu begründen (*Größenvergleich, Bevölkerungswachstum in Österreich*), mathematisch zu begründen (*Rechter Winkel*), zu beschreiben (*Raute*) bzw. zu erklären (*Flächeninhalt*). Allgemeinere Antworten werden bei den Beispielen *Zehnerpotenzen, Binomische Formel, Wandertag, Koalitionen* und *PISA-Ergebnisse* verlangt.

Zeigen meint dabei im Sinne der vorgeschlagenen Antwortmöglichkeiten das Explizieren von Rechenregeln und ist dem Handlungsbereich 4 (Argumentieren, Begründen) zugeordnet. Die *mathematische Begründung* verlangt einen ähnlichen Lösungsweg. Sprachlich sind beide nach der oben gegebenen Definition also dem Aspekt des Begründens zugeordnet.

¹ Es handelt sich dabei um die Beispiele *Verschiedene Lösungswege, Bildungsstand der Österreicherinnen und Österreicher, Irrationale Zahlen, Straßenbau, Zylinder, Mädchen in der Überzahl, Eintrittspreise, Schrägriss und Grundriss, Pyramide, Verwandte Vierecke, Tippfehler* und *Durchschnittliches Monatsgehalt*.

Begründen hingegen sollen die Schüler(innen) mit Worten, wobei die Argumentationsbasis zum Teil bereits vorgegeben ist.

Beschreiben meint das Auflisten aufeinander folgender Tätigkeiten, also im konkreten Fall das Durchführen eines Konstruktionsweges; *erklärt* soll das Zustandekommen der Flächeninhaltsformel eines Trapezes werden.

Die übrigen oben genannten Beispiele fordern die Schüler(innen) auf, verbale Begründungen für die Verwendung von Darstellungsweisen (*Zehnerpotenzen, Koalitionen, PISA-Ergebnisse*) oder Umformungen (*Binomische Formel*) zu finden, bzw. mit Hilfe von mathematischen Kenntnissen (über lineare Funktionen) Begründungen für Entscheidungen anzugeben (*Wandertag*). Mit Begründung ist hier das Wort im eigentlich Sinn gemeint, nämlich einen Grund finden, warum etwas so und nicht anders ist. Explizit genannt wird das Wort „Begründen“ aber nicht.

Die daraus sich für den Schulunterricht ergebenden Schwierigkeiten können auf mehreren Ebenen liegen: Erstens muss den Schüler(inne)n im Sinne des Erlernens der Kompetenz des Argumentierens und Begründens klar sein, welches Wort welche (Art von) Antwort verlangt. Dieser Umstand kann geübt werden, sofern dieselben Worte bei der Testung auch dieselben Antwortmodi bedingen. Dazu sollte aber zuerst geklärt sein, ob die verschiedenen Ausdrücke (zeige, begründe mathematisch, ...) bewusst so verwendet wurden – ein bestimmter Ausdruck verlangt eine bestimmte Antwortform – oder ob die Verwendung eher zufällig entstanden ist.

Zweitens scheint bei genauerer Betrachtung der vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten manchmal nicht klar zu sein, mit welcher Genauigkeit bzw. Expliziertheit die Antwort gegeben werden soll. Malle schreibt dazu, dass jede Begründung der Vorgabe einer *Argumentationsbasis* bedarf, d. h. eines Fundaments, auf das man sich bei seiner Argumentation stützt (vgl. Malle 2002, S. 5). „In der höheren Mathematik ist meist klar, welche Argumentationsbasis zugrundeliegt. In der Schule ist dies jedoch nur selten der Fall. Vor allem liegt bis zur 8. Schulstufe

fast nie eine klare Argumentationsbasis vor. Das bedeutet eine beträchtliche Schwierigkeit für die Lernenden. Sie sind nämlich meist unsicher, worauf sie sich berufen können und worauf nicht“ (Malle 2002, S. 5). Betrachtet man die Aufgabenbeispiele im Standards-Papier, so wird die Argumentationsbasis teilweise vorgegeben (*Größenvergleich*) und teilweise völlig offen gelassen (*Koalitionen, PISA-Ergebnisse, Bevölkerungswachstum in Österreich, ...*), eine für die Schüler(innen) nicht zu unterschätzende Schwierigkeit.

Zusätzlich ergibt sich daraus auch der Bezug zur oben genannten Genauigkeit, denn „von Exaktheit kann nur in Bezug auf eine bestimmte Argumentationsbasis gesprochen werden“ und „Exaktheit hat zu tun mit der Explikation der Argumente“ (Malle 2002, S. 6). Eine Begründung ist umso exakter, je detaillierter die Begründungsschritte ausgeführt werden und je deutlicher dabei der Bezug zur Argumentationsbasis ersichtlich ist. Da Standards ja letztendlich der Überprüfung bestimmter Kompetenzen dienen sollen, sollte auf die genannten Unklarheiten bei der Implementierung unbedingt Rücksicht genommen werden.

Eine *explizite Kategorisierung der Aufgaben* beim Üben – aber auch in den Testmaterialien – könnte insofern zweckmäßig sein, als dass sie den Schüler(inne)n eventuell die Wahl der Herangehensweise an die Aufgabenstellungen erleichtert.

In diesem Zusammenhang wollen wir auch auf das „*lokale Ordnen*“ hinweisen, einen Begriff, den Hans Freudenthal 1973 in der didaktischen Diskussion geprägt hat: „Man analysiert die geometrischen Begriffe bis zu einer recht willkürlichen Grenze, sagen wir, bis zu dem Punkte, wo man von den Begriffen mit dem bloßen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, daß sie wahr sind“ (zitiert nach Tietze, Klika & Wolpers 1997, S. 157). Um einen Beweis didaktisch analysieren zu können, ist es also wichtig, seinen Ausgangspunkt zu kennen. In der Mathematik sind das Axiome oder aus ihnen schon bewiesene Sätze. Im Mathematikunterricht dagegen treten an ihre Stelle eben als anschaulich unmittelbar einsichtig empfundene Sätze (nicht nur in der Geometrie! – Die positiven rationalen Zahlen werden vor den ganzen

Zahlen eingeführt, ihre Wohldefiniertheit als Äquivalenzklassen von Paaren ganzer Zahlen kann daher nicht einmal theoretisch bei ihrer Einführung begründet werden.).

Beweisaktivitäten können im Unterricht auch darin bestehen, die *Beziehung einzelner Sätze zueinander* zu klären: der Satz von Thales ist ein Spezialfall des Peripheriewinkelsatzes, analoge Formulierung der Teilbarkeitsregel durch drei und durch neun, Summenregel beim Teilen und das Herausheben gemeinsamer Faktoren etc.

Diese Weite der Auffassungsmöglichkeiten beim Argumentieren im Mathematikunterricht macht das Standardisieren dieses Handlungsbereiches zu einer nicht zu unterschätzenden Herausforderung: wie kann in einer konkreten, nicht zu ausufernden Aufgabenformulierung jene Eindeutigkeit erreicht werden, die zur Überprüfung der eigentlich fokussierten Kompetenz, dem Begründen und Argumentieren, unbedingt notwendig ist? – Das Interpretieren mathematischer Texte soll ja hier *nicht* im Vordergrund stehen!

Nicht verschwiegen soll an dieser Stelle auch werden, dass sich die Argumentationsbasen im Laufe der Unterrichtszeit *ändern* und *erweitern* können und sollen: siehe dazu Bürger 1979, S. 106 ff. Das kann z. B. die Präzisierung bisher undefinierter Begriffe bedeuten, wie der Umfang eines Kreises oder der Schwerpunkt eines Dreieckes (Ecken-, Flächen- oder Kanten-). Das Hinzufügen weiterer Sätze oder Definitionen schlägt ebenfalls in diese Kerbe, Teilbarkeitsregeln bei den natürlichen Zahlen oder die Erklärung negativer ganzer Hochzahlen wären Beispiele hiefür. Welche Voraussetzungen gehen eigentlich ein, um die Richtigkeit einer Aussage bei gegebener Argumentationsbasis zu begründen? Auf der anderen Seite kann das Erkennen von Unzulänglichkeiten gewisser Schlussweisen die Einsicht in das Wesen bestimmter Argumentationsbasen vertiefen.

Ein *Übergang* von einer Argumentationsbasis zu einer anderen kann auch zur *Relativierung* derselben beitragen: zum Beispiel kann der Satz: „Alle Peripheriewinkel auf derselben Seite einer Sehne eines Kreises sind gleich groß.“ mit Hilfe von Sätzen über die Winkel im

Dreieck oder mit Hilfe von Sätzen der Abbildungsgeometrie bewiesen werden.

Psychologisch gehört die oft zitierte Schüler(innen)äußerung „Muß das auch bewiesen werden? Das ist doch klar!“ (Bürger 1979, S. 107) hierher: hier muss zuerst einmal das Einsehen in die *Notwendigkeit einer Beweisführung* initiiert werden. Diese stellt sich natürlich nicht von selbst ein, auch nicht durch mehr oder weniger häufiges Begründen im Mathematikunterricht (das ist nur notwendig, aber nicht hinreichend), sondern durch Explizieren der Rolle von Beweisen innerhalb der Mathematik (hier ist der Lehrer bzw. die Lehrerin als Experte bzw. Expertin gefordert) und die daraus abzuleitende Forderung (des Faches), Begründen, Argumentieren als typische mathematische Tätigkeiten (neben anderen) in den Unterricht immer wieder einfließen zu lassen (siehe auch Abschnitt 5).

Hand in Hand mit dieser Intention geht dann der Aushandlungsprozess über eine *gemeinsame* Argumentationsbasis der Schüler(innen) und Lehrer(innen), ansonsten kann aufgrund der unterschiedlichen kognitiven Struktur [„Altersvorsprung“ der Lehrer(innen)] nicht erwartet werden, dass eine(r) der beiden einen Beweis führt, der auch für den oder die andere(n) zufriedenstellend ist. „Dabei bietet sich eine Argumentationsbasis an, die der kognitiven Struktur der Schüler angepaßt ist und die vom Lehrer zunächst zu übernehmen ist.“ (ebenda, S. 107).

4 Aufgaben aus Schulbüchern

Um den angestrebten Stellenwert des Argumentierens und Begründens im Mathematikunterricht zu etablieren, geht es in der konkreten Lernsituation inhaltlich darum, Voraussetzungen explizit zu machen, Argumentationsbasen zu identifizieren, die eigentliche Aussage zu erkennen, was sich z. B. im Wiedererkennen derselben in anderen Situationen zeigt, formal um das Ausbilden einer adäquaten Sprache, die richtige Verwendung von Quantoren und das genaue Formulieren der logischen Beziehungen.

Um dies im Schulunterricht zu erreichen, sollte prinzipiell zwischen Lern- und Prüfungssituationen unterschieden werden und zwischen mündlichen und schriftlichen Leistungen (vgl. dazu Götz & Sattlberger 2007, S. 103f.). So können in Lernsituationen unterschiedliche Lösungen zugelassen und (gemeinsam) diskutiert werden, es ist dabei auch erlaubt Fehler zu machen. Die Verschriftlichung – das genaue Formulieren – von Begründungen ist ein weiterer Schritt, der extra geübt werden muss, da er Schüler(inne)n immer wieder Schwierigkeiten bereitet, obwohl das zur Begründung nötige Faktenwissen prinzipiell vorhanden wäre.

Die folgenden Abschnitte sollen zeigen, dass herkömmliche Aufgaben aus Schulbüchern von Anfang an – bewusst und zielgerecht eingesetzt – das Argumentieren und Begründen auch im traditionellen Mathematikunterricht fördern können. Daraus wird ersichtlich, dass die Berücksichtigung dieses Handlungsbereiches ohne größeren Aufwand möglich ist.

4.1 Beispiele aus der 5. und 6. Schulstufe

Eine Voraussetzung für das Erlernen des richtigen, d. h. methodisch und inhaltlich passenden Einsatzes von Begründungen und Argumenten ist das Beschreiben können eines Sachverhalts. Diese Fertigkeit kann schon ab der 5. Schulstufe geübt werden. Zum Beispiel:

Berechne die Summe von 145, 311, 78 und 2 000. Verkleinere nun den ersten Summanden um 50 und den zweiten um 200 und vergrößere den dritten Summanden um 50 und den vierten um 200. Welche Summe erhältst du nun? Fällt dir etwas auf? (vgl. Hanisch et al. 2007, S. 51)

Diese Aufgabe kann eine mündliche wie schriftliche Formulierung eines Sachverhalts verlangen, die Lösungsvorschläge können diskutiert werden. Das Formulieren lernen stellt dabei eine nicht zu unterschätzende Herausforderung für Schüler(innen) dar, da es dabei ja darum geht, in einem Satz (oder wenigen Sätzen) genau

aufzuschreiben oder wiederzugeben, was gedacht wird. Diskussionen mit Mitschüler(inne)n zur Klärung des Sachverhalts (Für welche Argumentationsbasis entscheiden wir uns? Welche unserer Gedanken tragen wirklich zu einer Lösung bei?, ...) können vor dem Finden einer endgültigen Formulierung sehr hilfreich sein.

Ein weiteres Beispiel:

Tom und Sara machen Mathe-Hausübung. Zuerst rechnet jeder selbst, dann vergleichen sie immer ihre Ergebnisse. So sind sie schon oft auf Fehler draufgekommen und konnten sie noch rechtzeitig ausbessern. Diesmal hatten sie unter Anderem folgendes Beispiel zu rechnen:

$$6782 + 455 - (2488 - 178) =$$

Toms Ergebnis ist 4 927 und bei Sara kommt 4 571 heraus. Kannst du überprüfen, wer richtig gerechnet hat? Begründe deine Antwort! (vgl. Hanisch et al. 2007, S. 65)

Hier wird das Begründen schon explizit verlangt. Doch muss geklärt werden, was als Argumentationsbasis ausreicht – einfaches Nachrechnen oder soll ein Satz formuliert werden? Der im Buch angegebene Lösungsvorschlag lautet: „Tom hat richtig gerechnet, da er die Klammerregel beachtet hat.“ (ebenda).

Folgendes Beispiel kann auch schon mit Schüler(inne)n der ersten Klasse besprochen werden, auch wenn die Teilbarkeit erst in der zweiten Klasse vorgesehen ist:

Die Zahlen 6 und 15 sind durch 3 teilbar. Überprüfe, ob auch

- a) die Summe dieser Zahlen durch 3 teilbar ist,
- b) die Differenz dieser Zahlen durch 3 teilbar ist,
- c) das Produkt dieser Zahlen durch 3 teilbar ist!
- d) Erstelle zu den obigen Aufgaben einen entsprechenden Merksatz!

Zur Teilaufgabe d) ist zu bemerken, dass später einmal (9. Schulstufe) dieser Merksatz dann auch *allgemein* begründet werden kann. *Überprüft* wird (in der ersten Klasse) anhand konkreter Zahlen.

Das Finden von Fehlern und Argumenten zu deren Richtigstellung bildet einen weiteren Aspekt der Ausbildung von Reflexionswissen:

Paul Kuddelmuddel rechnet so: $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Erkläre, was er falsch gemacht hat und wie es richtig wäre! (vgl. Hanisch et al. 2008, S. 92, leichte Änderungen von der Verfasserin)

Die Antwort der Schüler(innen) könnte hier lauten: „Er hat statt auf gleichen Nenner zu bringen die Zähler und die Nenner addiert.“ (Lösungsvorschlag ebenda).

Derartige Aufgaben haben den Vorteil, dass nicht Fehler von Schüler(inne)n der zu unterrichtenden Klasse besprochen werden müssen, sondern eine fiktive Figur stellvertretend für typische Schüler(innen)fehler eingesetzt wird.

Von entscheidender Bedeutung ist hier, dass von Anfang an der Vergleich von verschiedenen oder zumindest verschieden lautenden Begründungen ein nicht zu vernachlässigender Bestandteil des Unterrichts ist bzw. wird. Fundierte Erklärungen, also solche, die begründet werden und nicht einfach zur Kenntnis genommen werden müssen („Behauptungen“), sind als *integraler* Bestandteil des Mathematik Treibens auch von den Schüler(inne)n zu identifizieren. Eine *fundamentale Idee* quasi, die sich aber nicht wie andere unbedingt aus der Situation heraus ergibt (denken wir z. B. an das Optimieren), sondern immer wieder auch von Lehrer(innen)seite oder in der Aufgabenstellung eingefordert werden muss. Deutlich wird das bei vielen Geometrieaufgaben zum Begründen, wo ja oft *scheinbar Selbstverständliches begründet* werden muss: warum sind z. B. Parallelwinkel gleich oder supplementär? Oder *anschaulich vollkommen Klares* wie das Verhältnis der Größe des Mittendreiecks zu der des ursprünglichen *gezeigt* werden muss.

4.2 Beispiele aus der 7. und 8. Schulstufe

Die Aufgaben in Abschnitt 4.1 sind alle aus dem Inhaltsbereich II „Zahlen und Maße“. Zu I2, „Variable, funktionale Abhängigkeiten“, passt die folgende Aufgabe aus Reichel, Litschauer & Groß 2004, S. 110:

Arbeitet **zu zweit!**

Wenn keine der Zahlen $n-1$, n und $n+1$ durch 5 teilbar ist, ist sicher n^2+1 durch 5 teilbar.

- a) Überprüft diesen Satz anhand von 5 selbst gewählten natürlichen Zahlen!
- b) Führt den hier skizzierten Beweis dieses Satzes zu Ende!
Beweis: Wenn keine der Zahlen $n-1$, n und $n+1$ durch 5 teilbar ist, dann ist entweder $n-2$ oder $n+2$ durch 5 teilbar. Erklärt diesen Ansatz!
Daher können wir im ersten Fall schreiben:
$$n - 2 = 5 \cdot t \Rightarrow n = 5 \cdot t + 2 \Rightarrow n^2 = 25 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 4 \Rightarrow n^2 + 1 = 25 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 5$$

Diese Zahl ist durch 5 teilbar. Begründet die Teilbarkeit!
- c) Führt den Beweis für den zweiten Fall!

Bemerkenswert ist hier der schrittweise Aufbau der Argumentation: i) konkrete Zahlenbeispiele, um sich zu veranschaulichen, worum es hier überhaupt geht, ii) Fallunterscheidung. Auf die Beweislücken wird hier noch explizit hingewiesen. Das stützt die Klassifikation dieser Aufgabe in den Komplexitätsbereich K2, „Herstellen von Verbindungen“. Dazu passt auch, dass der zweite Fall *analog* zum ersten abzuarbeiten ist. Die Aufforderung, paarweise diese Aufgabe zu bearbeiten, betrifft natürlich die Kommunikation, den Austausch über mathematische Sachverhalte.

Dieser schrittweise Aufbau lokal bereitet das *Spiralprinzip* global vor. Ein schönes Beispiel des „immer wieder Aufgreifens auf steigendem Niveau“ (Teilbarkeitsregel von natürlichen Zahlen durch neun) findet sich Götz & Sattlberger 2007, S. 107f.

I3, „Geometrische Figuren und Körper“, ist eine wahre Fundgrube für das Argumentieren und Begründen: jede geometrische Konstruktion kann erklärt werden, dabei werden wohl auch Begründungen vorkommen. Auf S. 193 in Reichel, Litschauer & Groß 2004 findet man (Abb. 1):

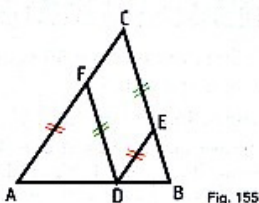


Abb. 1: Ähnliche Dreiecke oder nicht?

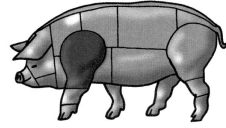
Welche der Dreiecke in Fig. 155 sind ähnliche Dreiecke?
Begründe ihre Ähnlichkeit!

Ein ganz unspektakuläre Aufgabe, die zeigen soll, wie selbstverständlich, quasi „von alleine“, der in Rede stehende Handlungsbereich in den Unterricht integriert werden kann. Erleichtert wird dieser Umstand hier natürlich dadurch, dass die gewählte Aufgabe aus dem Komplexitätsbereich 1, „Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten“ stammt.

Auch der letzte Inhaltsbereich, I4, „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“, öffnet sich dem Begründen, vielleicht bis zur 8. Schulstufe nicht in der Vielfalt wie die anderen Inhaltsbereiche, aber doch:

In je fünf (zufällig gewählten) Geschäften² in Wien, Innsbruck, Graz und Linz sind (an einem bestimmten Tag) die folgenden Preise in € für 1 kg ausgelöste Schulter erhoben worden:

Wien:	5,40	6,80	5,70	5,70	5,90
Innsbruck:	6,70	6,70	5,50	5,20	5,40
Graz:	6,60	5,70	5,50	6,60	5,60
Linz:	5,60	6,10	5,80	5,80	5,70



Fleischteile eines Schweines

Reihe die Städte

- 1) nach dem Zentralwert,
- 2) nach dem Modalwert,
- 3) nach dem arithmetischen Mittel!

Diese Aufgabe stammt aus Reichel, Litschauer & Groß 2005, S. 129, es zeigt sich, dass jedes Mal eine andere Reihung der Städte herauskommt. Die Aufgabe mag künstlich wirken, sie ist auch nicht als Prototyp für Anwendungsaufgaben gedacht, allemal, sie fordert zum Argumentieren heraus: „Was stimmt jetzt? – Wo ist es jetzt wirklich am teuersten?“ „Nehmt Stellung!“ Wenn die entsprechenden Mittelwerte schon eingeführt worden sind, wovon auszugehen ist – die zugehörige Kapitelüberschrift lautet „Kritische Gegenüberstellung verschiedener Mittelwerte“ –, dann gehört diese Aufgabe dem Komplexitätsbereich K3, „Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren“ an.

5 Argumentieren und Begründen: die Kür

Begründen und Argumentieren kann aber auch mehr global sich auf die gewählte Vorgangsweise z. B. beim *problem solving* beziehen, oder auf die Wahl eines bestimmten *Modells* unter mehreren in Frage kommenden. Dieser Anspruch setzt ein genügendes Maß an Reflexionsvermögen voraus, welches ebenfalls das

² Es handelt sich hierbei wohl um *Fleischhauereien*. Große Lebensmittelketten bieten bekanntlich in ganz Österreich ihre Produkte zu denselben Preisen an.

Unterrichtsgeschehen ständig durchsetzen muss (nicht immer explizit, aber latent vorhanden).

Um dieses Ziel und die damit verbundenen Ansprüche zu erreichen, ist zweierlei notwendig: *erstens* ist die oben angeführte strenge Sichtweise des mathematischen Beweisens zugunsten einer weiteren aufzugeben, wie es auch eher der Beschreibung dieses Handlungsbereiches im Kompetenzmodell entspricht. Die Schulpraxis wird dagegen im Allgemeinen nichts haben, hier liegt die Schwierigkeit der Umsetzung im Detail. Das Problem lösen ist immer auch ein kreativer Akt, zumindest – und darauf kommt es hier an – das Finden (un)möglicher (oft weiß man das erst hinterher!) Lösungswege. Sind diese vorgegeben, dann kann es genügen, eine Standardmethode anzuwenden, Analogieschlüsse zu ziehen, etc. oder gar nur bestimmte Lösungsschritte nachzuvollziehen (wie das in den Aufgabenbeispielen des Klagenfurter Kompetenzmodells oft der Fall ist – siehe Abschnitt 3 dieses Beitrags!). Kreativität aber verträgt sich schlecht mit Prüfungssituationen, will man daher problem solving nicht um ein wesentliches Moment beschneiden, müssen andere, alternative Wege der Leistungsbeurteilung beschritten werden, unterstützt durch Methoden jenseits des Frontal- oder auch fragend-entwickelnden Unterrichts. Die jetzt schon zweimal erwähnte Vorgangsweise mutet in diesem Zusammenhang ein wenig künstlich an, wenngleich bezogen auf den in Rede stehenden Handlungsbereich nachvollziehbar. Vielleicht ist es sogar eine gute Idee.

Ähnliches gilt für das *Modellbilden*, die Bewertung verschiedener Modelle für eine bestimmte Situation ist ein wesentliches Element dabei, und gehört natürlich zu diesem Handlungsbereich, seine Isolierung darf aber nur eine Zwischenstufe im Unterricht sein, will man dem Modellbilden gerecht werden. Die obige Aufgabe, die die Berechnung verschiedener Mittelwerte verlangt, ist eine Vorstufe dazu. Selbst einen „passenden“, das heißt der Situation angemessenen Mittelwert zu wählen und die Wahl begründen zu können, stellt dann schon einen Fortschritt dar. Schulnoten z. B. vertragen sich

bekanntermaßen nicht mit dem arithmetischen Mittel, der Median ist hier „zuständig“.

Verallgemeinernd – und so steht es auch in der Beschreibung des Handlungsbereiches „Argumentieren, Begründen“ (Heugl & Peschek 2007, S. 12) – geht es also auf einer nächsten Stufe darum, *selbst* zu finden, zu kreieren, auszusuchen, und Argumente zu bringen, warum adäquat, warum Erfolg versprechend, warum stichhaltig, etc.

Schwieriger ist es schon, *zweitens* die Haltung des Begründens und Argumentierens in den Mathematikunterricht *in ständiger Art und Weise* einfließen zu lassen, es sollte schließlich eine *Grunddisposition* dafür erzeugt werden. Diese ist für das langfristige Ziel, Argumentieren und Begründen im Mathematikunterricht als essentielles Element zu etablieren, unverzichtbar: die Akzeptanz von Begründungen oder Beweisen hängt neben der Wahl der Argumentationsbasis auch von der kognitiven Struktur einer Person ab, sie sind a priori unterschiedlich bei verschiedenen Individuen. Das „Beweisbedürfnis“ muss erst erweckt werden (siehe dazu auch das Ende von Abschnitt 3: Bemerkungen zur Argumentationsbasis). Das bedeutet aber, dass von der ersten Klasse (A)HS bzw. KMS an Aufgaben zum Argumentieren und Begründen gestellt werden müssen, um hier eine entsprechende Unterrichtskultur aufzubauen. In diesem Beitrag ist der Versuch unternommen worden, den Nachweis zu erbringen, dass dazu auch viele „herkömmliche“ Aufgaben, wie sie in gängigen Schulbüchern vorkommen, – eventuell nach leichten Abänderungen – sehr geeignet sind. Doch das alleine genügt nicht für dieses hohe Ziel. Auch das Begründen, das Argumentieren kann bis zu einem gewissen Grad (ein-)gelernt werden, automatisiert werden, zumal in Prüfungssituationen zu Recht keine grundsätzlich neuen Problemstellungen vorkommen [dürf(t)en]. Was wirklich gemeint ist ist zu erreichen, dass der Mathematikunterricht diesen Handlungsbereich ständig bemüht, und dabei alle daran Beteiligten anspricht: Schüler(innen) und Lehrer(innen). Die Frage „Warum ist das (eigentlich) so?“ muss nicht ständig gestellt werden, aber es muss schließlich klar werden, dass sie ständig gestellt werden *könnte*. „Klar

werden“ heißt hier, zu begründende Stellen (nicht unbedingt immer die Gründe, Argumente selbst, das kann im Einzelfall sehr schwierig sein!) in einer Argumentationskette zu erkennen: „Das müsste man eigentlich auch noch zeigen! [Aber wir verzichten (jetzt) darauf aus diesen und jenen Gründen.]“

Vorübungen zum Beweisen und lokalen Beweisen sind z. B. Unterscheiden von Sätzen und Definitionen, Begründen von Einzelschritten beim Lösen von Aufgaben, Übungen in logischen Schlussweisen an mathematischen und außermathematischen Inhalten (Analyse von „Wenn ..., dann ...“-Beziehungen, Umkehrung von Sätzen oder Behauptungen), zusammenfassende Darstellungen der Lösung von Aufgaben oder die Verwendung von Variablen zur Beschreibung und zur Verallgemeinerung von Sachverhalten (Bürger 1979, S. 111ff.).

Das *Arbeiten mit vorliegenden Beweisen* ist ein nächster Schritt in der Explizierung von H4. Dabei kann das Wiedergeben von Beweisen oder Teilen davon passieren, eventuell mit veränderter Bezeichnung oder anhand einer veränderten Zeichnung, das Durchführen eines Beweises für einen Sonderfall, die richtige Sequenzierung der ungeordnet vorgelegten Teile eines Beweises, das Erkennen, dass bei mangelhafter Wiedergabe eines Beweises einzelne (bekannte) Beweisschritte fehlen und Wiedergabe dieser Schritte, das Begründen einzelner Beweisschritte durch mathematische Sätze oder Definitionen, das Feststellen der Beweisstellen, bei denen Voraussetzungen eingehen, das Erkennen von Beweislücken bzw. von Exaktifizierungsmöglichkeiten, das Ausfüllen von Beweislücken bzw. die Durchführung der Exaktifizierung, Präzisierungen in formaler Hinsicht, Erkennen von Fehlern sachlicher oder logischer Art, Erkennen logischer Schlussweisen und schließlich die Darlegung der Beweisstruktur (des Beweisgedankens) durch Wiedergabe der Voraussetzungen, Beschreibung der wichtigsten Beweisschritte in geordneter Folge und Angabe des Ziels (Bürger 1979, S. 117ff.).

Das eigentliche *Finden eines Beweises* wird in Bürger 1979, S. 120f. als (zu) schwierig für die Schüler(innen) alleine, also in Eigentätigkeit oder in Gruppenarbeit, dargestellt. Ein starkes Moment ist das Führen von Analogiebeweisen in diesem Zusammenhang. Der Nachweis einzelner Fälle bei einem Beweis mit Fallunterscheidungen ist eine weitere Möglichkeit, wir haben sie bei der Aufgabe oben aus Reichel, Litschauer & Groß 2004, S. 110, gesehen. Die Verallgemeinerung eines Beweises entspricht der umgekehrten Richtung. Aufgaben können einen Beweis vorbereiten, ihre Verallgemeinerung lässt dann den Beweis finden. „Die Summe von zwei geraden Zahlen ist gerade“ – „Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist gerade“, ein Beispiel für das Führen von Beweisen in eng abgegrenzten Stoffgebieten, welches hier auch eine Rolle spielen könnte. Bereits bekannte Beweismuster können kombiniert werden und in vertrauten oder dann auch in neuen Stoffgebieten angewendet werden (z. B. Ähnlichkeitsargumente bei Dreiecken und Vierecken). Wird eine Beweisskizze vom Lehrer bzw. von der Lehrerin vorgegeben, können Lücken von den Schüler(inne)n gefüllt werden (Bürger 1979, S. 120ff.).

Zur *Motivierung von Schüler(inne)n* zum Beweisen ist es notwendig, Begründungen an die Argumentationsbasis von Schüler(inne)n (vorerst) anzupassen. Dabei werden vielleicht Mängel in der Argumentation sichtbar, die eine Änderung der Argumentationsbasis nahelegen. Eine wichtige Erfahrung ist auch, dass eine Änderung der Definition mathematischer Begriffe Auswirkungen auf den Begriffsumfang haben kann. Schüler(innen) sollen Beweisen auch als Aufgabe sehen, mit vorgegebenen Argumenten zu begründen. Beweisen entscheidet manchmal über die Richtigkeit oder Falschheit einer Aussage, oder aber auch trägt es zum Revidieren derselben bei. Der kommunikative Austausch über mathematische Argumentationen unter Schüler(inne)n ist schon angesprochen worden, er kann auch der Motivation dienen. Der Beitrag des Begründens, des Argumentierens im Mathematikunterricht zur Allgemeinbildung ist evident, praktisch jede qualifizierte Tätigkeit verlangt diese Kompetenz. Die Selbsttätigkeit der Schüler(innen) beim Erwerb dieser Kompetenz kann

und soll immer von Lehrer(innen)seite mitbedacht werden, das Ausmaß dabei festzulegen erfordert eine fundierte mathematische Bildung der Lehrer(innen), um hier zu adäquaten Einschätzungen zu gelangen (Bürger 1979, S. 127ff.).

6 Eine Schlussthese

Abschließend stellen wir die These auf, dass der in Rede stehende Handlungsbereich *alle anderen* umfasst: „Darstellen, Modellbilden“ wird zumindest im Wechsel mathematischer Repräsentationen angesprochen. Dazu sei die folgende Abbildung angeführt:

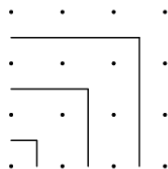


Abb. 2: Quadratzahlen

Sie suggeriert eindrucksvoll, dass $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ ist. Dabei ist n eine natürliche Zahl ungleich null (aus Freudenthal 1979, S. 196).

„Rechnen, Operieren“ – man denke etwa an das obige Beispiel aus Reichel, Litschauer & Groß 2004, S. 110, oder an jene aus Abschnitt 4.1. Im ersten Fall dienen algebraische Umformungen dazu, die Richtigkeit der zu beweisenden Aussage zu *erkennen*: n^2+1 besteht ausschließlich aus Summanden, die den Faktor 5 enthalten. Daher ist n^2+1 durch 5 teilbar, denn der Faktor 5 kann also herausgehoben werden.

Zweitens verlangen die Beispiele aus Abschnitt 4.1 das Operieren mit *konkreten* Zahlen, wie es ja auch der Altersstufe entspricht. Die Rechnungen sind allerdings auch, und darauf zielen die Aufgaben eigentlich ab, als *paradigmatische Beispiele* für *allgemeine Gesetzmäßigkeiten* zu sehen: $a + b = (a - c) + (b + c)$, Klammerregel, Teilbarkeitssaussagen über Summen, Differenzen und Produkte,

Rechenregel für das Addieren von Brüchen. Eine Begründung anhand konkreter Beispiele bereitet so jene für die entsprechende allgemeine Aussage vor.

Und schließlich „*Interpretieren*“, sehen wir uns die nähere Beschreibung in Heugl & Peschek 2007, S. 12 an: „*Interpretieren* meint, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzulegen sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten.“ *Zusammenhänge erkennen* (vgl. auch den Komplexitätsbereich K2 in Heugl & Peschek 2007, S. 14) ist wohl eine der tragenden Säulen jeder (mathematischen) Begründung bzw. Argumentation.

Diese wenigen, aber *paradigmatischen* Beispiele sollen zeigen, dass die mathematische Tätigkeit des Argumentierens bzw. die des Begründens (fast) immer auch wenigstens eine Tätigkeit aus den anderen Handlungsbereichen anzieht. – Wie könnte es auch anders sein?

Andererseits aber ist sehr wohl ein Mathematikunterricht *ohne* Argumentieren und Begründen zwar nicht wünschenswert (wie aus dem Beitrag hoffentlich klar hervorgeht!), aber möglich, und ein solcher kommt auch tatsächlich vor. Wenn nun dies geändert werden soll, und der in Rede stehende Handlungsbereich fordert das eigentlich, und die Wissenschaft Mathematik verlangt das auch vom Fach Mathematik, dann sagt die Schlussthese aus, dass *gleichzeitig nicht* auf typische Tätigkeiten der anderen Handlungsbereiche des Klagenfurter Standards-Modells deswegen verzichtet werden muss. Mit anderen Worten: es liegt eine win-win-Situation vor, die es zu nützen gilt. Trägt die Einführung der Standards in Mathematik für die 8. Schulstufe dazu bei, dann ist alleine dadurch schon viel für den Mathematikunterricht, die daran beteiligten Personen und die Mathematik selbst gewonnen.

7 Resümee

Es stellt zweifellos einen (*normativen*) *Fortschritt* gegenüber der in der Einleitung geschilderten Situation des verzerrten Abbildes der Wissenschaft Mathematik im Mathematikunterricht dar, dass „Argumentieren, Begründen“ im Klagenfurter Standards-Modell einen so prominenten, unübersehbaren Platz einnimmt. Die in Abschnitt 3 dieses Beitrags geäußerten Hinweise auf *Desiderata* schmälern diese Einschätzung *nicht*, sie zeigen nur auf, welche flankierenden Maßnahmen jedenfalls im Unterricht gesetzt werden müssen, damit dieser Teil der Initiative (i. e. Einführung der Standards in Mathematik am Ende der 8. Schulstufe) entsprechend – auch in Hinsicht auf das Abprüfen! – umgesetzt werden kann.

In Abschnitt 4 wird *paradigmatisch nachgewiesen*, dass zu dieser Intention passende Aufgaben in den gängigen Schulbüchern vorhanden sind, sie müssen nur auch im Unterricht tatsächlich behandelt werden. Daraus folgt aber, dass Zeit dafür geschaffen werden muss, Zeit, die sonst im real existierenden Mathematikunterricht häufig für das Operieren (im weitesten Sinn!) verwendet wird. Ob hier der *Computereinsatz*, wie das so oft didaktisch begründet formuliert und zur Diskussion gestellt worden ist (z. B. Peschek 1999), Freiräume (für das Begründen und Argumentieren) schafft, sei erst mal dahingestellt bzw. nur als Denkmöglichkeit formuliert: Wie wissenschaftlich mehrfach festgestellt (vgl. etwa Jungwirth 2006) und auch in vielen schulpraktischen Projektberichten zum Thema Computereinsatz im Mathematikunterricht erwähnt wird (exemplarisch sei hier Hofer 2005 genannt), kann das Erlernen einer routinierten und sachgerechten Bedienung von Computern wie seine nicht sachbezogene Verwendung (vgl. etwa Weigand 1999, S. 47) auch viel an Unterrichtszeit binden, die so der Entwicklung mathematischer Kompetenzen (wie z. B. das Argumentieren und Begründen) entzogen wird.

Die Hoffnung, dass durch Auslagerung operativer Tätigkeiten an elektronische Medien Unterrichtszeit gewonnen werden kann, um andere, etwa standardsbezogene kommunikative mathematische

Tätigkeiten und Lernprozesse in den Vordergrund zu rücken – wie z. B. das Argumentieren und Begründen – (vgl. etwa Peschek & Schneider 2002, S. 190ff), erfüllt sich also nicht immer und vor allem *nicht von selbst*: Zu oft wird die frei werdende Zeit anderweitig, z. B. mit der Suche der Schüler(innen) nach Fehlern in der Programmbedienung oder für eher technische „Spielereien“, verwendet.

Diese Überlegungen und Beobachtungen deuten also darauf hin, dass wahrscheinlich einfach *weniger Aufgaben zum Operieren* behandelt werden müssen, um Zeit und Raum für andere mathematische Tätigkeiten wie z. B. das Argumentieren und Begründen im Mathematikunterricht zu schaffen. Gelingt das, dann ist auch ein *faktischer Fortschritt* des österreichischen Mathematikunterrichts zu konstatieren.

Last but not least stellt sich natürlich die Frage: Kann man Argumentieren und Begründen überhaupt *abprüfen*? – Auf die Wichtigkeit einer präzisen Aufgabenstellung und der Einführung einer gemeinsamen Argumentationsbasis (österreichweit?!) bei jeder Aufgabe ist schon hingewiesen worden (Abschnitt 3). Dennoch, Argumentieren und Begründen ist ein genuin auch kreativer (und oft komplexer, weil Zusammenhänge suchender) Akt, so dass *analoge Aufgaben* wohl schon im Unterricht *vor* der Testung vorgekommen sein müssen, um eine erfolgreiche Bewältigung von Seiten der Schüler(innen) „im Durchschnitt“ (Regelstandards!) zu ermöglichen oder wenigstens in Aussicht zu stellen.

Literatur

Bürger, H. (1979): *Beweisen im Mathematikunterricht – Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II*. In: Dörfler, W. & Fischer, R. (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht*. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ von 26. 9. bis 29. 9. 1978 in Klagenfurt. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band

2. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Wien und Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky und B. G. Teubner, S. 103-134.
- Fischer, R. (2003): *Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft*. In: Erziehung und Unterricht, Heft 5/6, S. 559-566.
- Freudenthal, H. (1979): *Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht*. In: Dörfler, W. & Fischer, R. (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht*. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ von 26. 9. bis 29. 9. 1978 in Klagenfurt. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 2. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Wien und Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky und B. G. Teubner, S. 183-200.
- Götz, S. & Sattlberger, E. (2007): *ERBEG – Erklären und Begründen im Mathematikunterricht*. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der ÖMG (Heft 39), S. 102-132.
- Hanisch, G., Benischek, I., Hauer-Typelt, P. & Sattlberger, E. (2007): *MatheFit 1*. Linz: Veritas-Verlag.
- Hanisch, G., Benischek, I., Hauer-Typelt, P. & Sattlberger, E. (2008): *MatheFit 2*. Wien: Verlag Besseres Buch.
- Heugl, H. & Peschek, W. (2007): *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07*. Herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung – Alpen-Adria-Universität Klagenfurt: http://www.bifie.at/sites/default/files/publikationen/2007-05-09_BIST-M8.pdf, 24.11.2008.
- Hofer, M. (2005): *Matheonline Network – Geometrie mit dem PC*. http://imst.uni-klu.ac.at/imst-wiki/images/b/b2/173_Langfassung_Hofer.pdf, 4.9.2008.
- Jungwirth, H. (2006): *Die Intervention des Computers*. In: Jungwirth, H. & Krummheuer, G. (Hrsg.): *Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht*. Band 1. Münster u. a.: Waxmann, S. 119-152.
- Lehrplan (2000): *Lehrplan für (A)HS-Unterstufe*: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf>, 24.11.2008.

- Malle, G. (2002): *Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht*. In: *mathematik lehren* 110, S. 4-8.
- Peschek, W. (1999): *Auslagerung als didaktisches Prinzip eines computerunterstützten Mathematikunterrichts*. In: Neubrand, M. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999*. Hildesheim: Franzbecker, S. 405-408.
- Peschek, W. & Schneider, E. (2002): *CAS in general mathematics education*. In: *ZDM* Vol. 34 (5), S. 189-195.
- Reichel, H.-C., Litschauer D. & Groß, H. (2004): *Das ist Mathematik 3. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 3. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen*. Wien: Verlag öbv&hpt (2. Auflage, Nachdruck 2007).
- Reichel, H.-C., Litschauer D. & Groß, H. (2005): *Das ist Mathematik 4. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen*. Wien: Verlag öbv&hpt (2. Auflage, Nachdruck 2007).
- Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (1997): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*. Unter Mitarbeit von F. Förster. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
- Weigand, H.-G. (1999): *Eine explorative Studie zum computerunterstützten Arbeiten mit Funktionen*. In: *JMD* Jg. 20, Heft 1, S. 28-54.