Hans HUMENBERGER

Die österreichischen Standards M8 und der Inhaltsbereich *Geometrische Figuren und Körper*

1 Einleitung

Die Ursprünge der Geometrie liegen einerseits in der Landvermessung (regelmäßige Nilüberschwemmungen, nach denen das Land immer wieder neu vermessen werden musste), andererseits in der Astronomie (Beobachtungen am Himmel), und die Geometrie ihrerseits ist vermutlich der Ursprung der ganzen Mathematik. Euklids Elemente (ca. 300 v. Chr.) waren der erste bekannte Versuch, ein Axiomensystem einzuführen, und daraus Sätze logisch abzuleiten (beweisen, begründen, unanfechtbar machen).

Einerseits war die Geometrie also die erste „*strenge* Wissenschaft“[1], in der logische (formale) Begründungen gefordert wurden. Andererseits ist die Geometrie eine sehr *anschauliche* Disziplin, geht es doch in ihrem Bereich insbesondere um Figuren, Körper und Formen. Diese Anschaulichkeit ist auch der Grund, warum Schüler(innen) im Mathematikunterricht nicht selten lieber Geometrie als Arithmetik oder Algebra betreiben.

In der Anschauung liegt einerseits eine große Faszination und Motivation, aber eben auch eine spezifische Tücke, die Anschauung braucht nämlich in der Wissenschaft unbedingt auch Strenge und logische Exaktheit (vice versa brauchen in einem Unterricht, d. h. in einem Lernprozess, Theorie und Strenge auch die Anschauung und den Praxisbezug):

[1] Noch heute sagt man, jemand habe etwas *more geometrico* gemacht, wenn man ausdrücken will, dass es auf eine besonders strenge und korrekte Art geschehen ist.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Anschaulichkeit,}\\ \text{Intuition}\end{array}\right\} \underset{\xleftarrow{\text{zur Sinngebung}}}{\overset{\xrightarrow{\text{zur Kontrolle}}}{\text{braucht}}} \left\{\begin{array}{c}\text{Strenge,}\\ \text{logische Exaktheit}\end{array}\right.$$

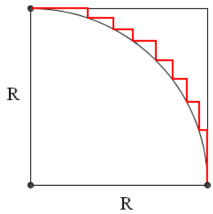

Abb.1

Dazu möge für jede Richtung ein einfaches Beispiel reichen. Nur anschaulich argumentiert könnte man in die „Versuchung“ kommen zu behaupten: „Die Länge des Viertelkreises mit Radius R ist $2R$“: Die Summe aller senkrechten und waagrechten Teilstücke der Treppe entlang des Viertelkreises ist immer $2R$ (jeweils R senkrecht bzw. waagrecht, egal wie fein die Stufen sind – Abb. 1). Die Treppenlinie ist aber bei hinreichend feinen Treppen von der Kreislinie nicht mehr zu unterscheiden, also …

Um solchen oder ähnlichen Trugschlüssen durch die Anschauung nicht zu unterliegen, braucht man also die Kontrolle durch strengere Begründungen bzw. Beweise.

Umgekehrt bedürfen zur vollen Sinngebung theoretische Erkenntnisse (Sätze) natürlich auch der Anschauung bzw. Anwendung (zumindest in der Schule, wo es ja nicht nur um die einzelnen Wissenschaftsdisziplinen an sich geht, sondern um Lernprozesse und Bildung). So kann z. B. die Bedeutung der Strahlensätze besser eingesehen werden, wenn damit anschauliche und praktische Phänomene erklärt werden, z. B. *warum bleibt eigentlich ein Bügelbrett in jeder Höhe parallel zum Boden?* – vgl. Abb. 2. Bei gleichen „Diagonallängen“ wäre dies wohl gar keine Frage, aber bei ungleichen ist diese Frage wohl berechtigt (s. unten: Aufg. 16). So können Teilantworten auf die (auch von Schüler(inne)n) immer wieder gestellte Sinnfrage gegeben werden, was sicher auch für die Motivation förderlich ist.

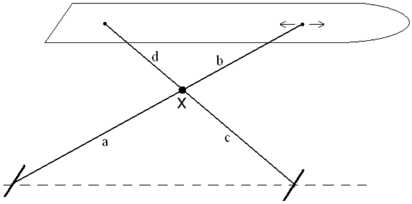

Abb. 2

Der Stellenwert der Elementargeometrie hat sich in den letzten Jahrzehnten leider ziemlich verringert. Dies betrifft sowohl den Unterricht in der Sekundarstufe 1 als auch die Lehrer(innen)-Ausbildung. Begründet liegt dies in der „Verdrängung“ durch modernere (auch nicht unwichtige) Stoffgebiete. Bei sinkender Stundenzahl ist es dann eine natürliche Konsequenz, dass einem weniger modernen Gebiet wie der Elementargeometrie weniger Umfang bzw. Bedeutung gegeben wird. Ich bedauere diese Entwicklung eigentlich, denn „die Elementargeometrie kann, wenn sie geeignet unterrichtet wird, die Ausbildung der menschlichen Wahrnehmungs- und Gestaltungsfähigkeit entscheidend fördern“ (Wittmann 1987, S. V). Auch kann die Geometrie im Lernprozess als wertvolles Bindeglied zwischen der Umgangssprache und der mathematischen Formalsprache dienen. In den letzten Jahren wurde der Geometrieunterricht durch verschiedene leistungsfähige Dynamische Geometrie-Software (DGS) noch anschaulicher – von beweglichen Figuren und dynamischen Konstruktionen konnte man ja lange Jahre hindurch nur träumen, inhaltlich und fachdidaktisch gesehen.

2 Die einzelnen Handlungs- und Komplexitätsbereiche beim Inhaltsbereich *Geometrische Figuren und Körper*

Standards müssen natürlich einerseits theoretisch fundiert sein, andererseits müssen sie für eine Umsetzung und Implementierung in der Unterrichtspraxis konkretisiert werden (Aufgabenbeispiele, Unterrichtseinheiten, etc.), so dass klar(er) ist, was damit gemeint ist. Insbesondere um solche Konkretisierungen aus der Sicht des Autors (primär in Form von Aufgaben) soll es im Folgenden gehen. Was können die einzelnen Handlungsbereiche in den einzelnen Komplexitätsbereichen hier (Geometrische Figuren und Körper) bedeuten?

Natürlich ist bei der Aufgabenstellung bzw. -analyse zu beachten, dass die Grenzen so gut wie immer fließend sind. Dies betrifft sowohl die Komplexitäts-, als auch die Handlungs- und Inhaltsbereiche. Die meisten Aufgaben decken eben genau genommen mehrere dieser Bereiche ab und können nur schwerpunktmäßig zugeordnet werden. Die jeweils zugehörige Klassenstufe ist bei den einzelnen Aufgaben nicht angegeben, sie versteht sich jeweils von alleine.

Aufgaben kann man mindestens in zwei Gruppen einteilen: Aufgaben zum *Lernen* (Unterricht, kein Zeitdruck, evtl. Selbständigkeit) und Aufgaben zum *Leisten* (Tests, Prüfungen, Schularbeiten). Natürlich gibt es auch Aufgaben, die in beiden Feldern eingesetzt werden können. Im Folgenden finden sich teilweise auch Aufgaben, die sich nicht als Leistungsaufgaben eignen. Diese sind dann als „Orientierung“ gedacht, wo der Geometrieunterricht mit Bedacht auf die Standards Akzente setzen könnte.

2.1 Rechnen, Operieren (R-O)

Im Bereich der Geometrie wird sich „Rechnen, Operieren“ vor allem auf Tätigkeiten beziehen wie: Durchführen von Konstruktionen, Umgehen mit geometrischen Formeln (Flächeninhalte, Volumina, Satz von Pythagoras, etc. – hier steckt naturgemäß auch eine algebraische Komponente drin: Variablen, funktionale Abhängigkeiten), „Arbeit mit den Händen“ (Ausschneiden, Falten, Muster legen, etc.). Bei den Komplexitätsbereichen *Herstellen von Verbindungen* und *Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren* können dabei die Aufgaben auch etwas komplexer bzw. tiefliegender, grundsätzlicher sein und über die genannten Tätigkeiten hinaus Verbindungen zu anderen Themen haben.

2.1.1 R-O – Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Hier wird es vor allem einerseits um *elementare Berechnungen* (Umfänge, Flächeninhalte, Volumina etc.) gehen und andererseits um *elementare Konstruktionen* (Konstruktionsaufgaben von Dreiecken; Konstruktion merkwürdiger Punkte in Dreiecken; Spiegelung von Punkten und Vielecken an Geraden etc.). Das Adjektiv *elementar* ist hier so gemeint, dass diese Berechnungen (Konstruktionen) direkt und ohne Umwege zu bewerkstelligen sind, also z. B. keine „spitzfindigen“ Dreieckskonstruktionen.

2.1.2 R-O – Herstellen von Verbindungen

Ein wesentliches Bildungsziel jedes Unterrichts besteht in der Befähigung, mit dem Lernstoff verständig umzugehen, und diese verständige Handhabung ist meistens mit *Kombinieren* verbunden, so dass das *Herstellen von Verbindungen* sicher als zentral in jedem Unterricht angesehen werden kann. In der didaktischen Literatur ist auch oft von *Vernetzen* oder *Beziehungshaltigkeit* die Rede. So schreiben z. B. Borneleit u. a. 2001, S. 82: „Vernetzung als Orientierungsgrundlage: Die Auswahl der Inhalte […] muss sich an deren Bedeutungs- und Beziehungshaltigkeit orientieren. Dabei ist es wichtig, dass den Lernenden zum einen die vertikalen Vernetzungen, die roten Fäden, deutlich werden, dass sie aber auch die horizontalen Vernetzungen zwischen den einzelnen Teilgebieten erkennen.“ Auch wenn das *hier* angesprochene Vernetzen ein anderes ist als Lernende bei der Bewältigung von (Standards-)Aufgaben zu leisten haben, so schlägt doch beides in dieselbe bekannte Kerbe: Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile, und in diesem Mehr liegt ein wesentliches Bildungsziel. Auch in den im Standards-Konzept hervorgehobenen Begriffen „Lebensvorbereitung“ und „Anschlussfähigkeit“ stecken viele Aspekte von Verbindungen und Vernetzen – Vernetzen mit dem schulischen und außerschulischen Leben „danach“.

Das *Herstellen von Verbindungen* ist in der Geometrie dann nötig, wenn man mehrere Darstellungen, Figuren, Sätze, Erkenntnisse, Phänomene etc. kombinieren muss.

Im Handlungsbereich **R-O** kann das *Herstellen von Verbindungen* z. B. bedeuten: Konkretes geometrisches Tun (Operieren: Falten, Drehen, Klappen, etc.) verbinden mit Eigenschaften geometrischer Figuren bzw. mit konkreten Berechnungen.

Bemerkung zum Standards-Konzept 4/07: Das Beispiel auf S. 79 würde ich nicht primär zu *Herstellen von Verbindungen* zählen, sondern eher noch zu *Einsetzen von Grundkenntnissen*: Man muss nur erkennen, dass das Zuklappen des Heftes mit einer Spiegelung zusammenhängt, an diesem Phänomen wird aber sogar oft die Einführung der Spiegelung im Unterricht aufgehängt, so dass ich hier nicht erkennen kann, dass „… der mathematische Sachverhalt und die Problemlösung komplexer sind“ (vgl. die Beschreibung auf Seite 14).

Abb. 3

Aufg. 1: Falte ein *Rechteck* in ein unförmiges Blatt Papier! Wie geht das?

Hier müssen die Schüler(innen) die Verbindung herstellen zwischen: Rechteck ↔ rechte Winkel ↔ Faltvorgang (wie faltet man rechte Winkel?)

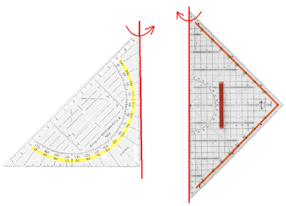

Abb. 4

Aufg. 2: Ein Geodreieck mit eine Hypotenusenlänge von 25 cm rotiere um eine Seite. Berechne den Rauminhalt des dabei entstehenden Körpers – Abb. 4.

a) Rotation um eine Kathete,

b) Rotation um die Hypotenuse.

Die zugehörigen *Rechnungen* (*Operationen*) sind nicht schwierig (Volumenformeln), aber bei a) müssen die Schüler(innen) erkennen, dass ein Drehkegel entsteht, wobei sie die Kathetenlänge zuerst berechnen müssen – eine *Verbindungsleistung* auf zwei Ebenen. Bei b) müssen sie erkennen, dass ein Körper entsteht, der aus zwei symmetrischen Drehkegeln besteht, und dass die Radien und die Höhen der beiden Drehkegel genau die halbe Hypotenusenlänge betragen, wieder eine Verbindungsleistung auf zwei Ebenen und insgesamt ein Aspekt von verständigem Umgang.

2.1.3 R-O – Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Im Zusammenhang mit R-O kann *Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren* z. B. bedeuten, einen Konstruktionsgang anzugeben. Der Weg muss dabei allgemein durchdacht und beschrieben werden. Wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, kann auch über deren Vor- und Nachteile reflektiert werden.

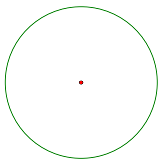

Abb. 5

Aufg. 3: Anna will ihrer Klassenkameradin Sonja erklären, wie man in einen vorgegebenen Kreis ein Quadrat einschreiben kann. Wie kann Anna das tun, wenn man a) nur ein Geodreieck, b) nur einen Zirkel und ein langes Lineal dafür verwenden darf?

Variante: regelmäßiges Sechseck (vgl. Aufg. 15: Argumentieren – Begründen)

Aufg. 4: Beschreibe zwei verschiedene Möglichkeiten, wie man ein Dreieck aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und dem der Seite gegenüberliegenden Winkel konstruieren kann! Welche würdest du bevorzugen und warum?

Hier ist absichtlich keine Skizze gegeben und keine Angaben wie z. B. $c = 7\,\text{cm}$, $\alpha = 80°$, $\gamma = 50°$; eine erste Leistung der Schüler(innen) sollte darin bestehen, aus dem in Worten beschriebenen Sachverhalt eine entsprechende Skizze selbst zu erstellen.

2.2 Darstellen, Modellbilden (D-M)

Der Begriff *Modellbilden* wird im Standards-Konzept sehr allgemein verstanden („in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen ...“), wobei auch ein innermathematischer Sachverhalt gemeint sein kann. Für mich persönlich gehört zum *Modellbilden* bzw. *Modellieren* in der Mathematik und auch im Mathematikunterricht aber doch notwendig ein *außermathematischer* Sachverhalt.

2.2.1 D-M – Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Aufg. 5: Drei Straßen schließen eine sehr schmale dreieckige Grünfläche (Rasen) miteinander ein. Auf seiner längsten Seite ist sie ca. 80 m lang. Die kürzeste Seite ist ca. 30 m lang und der Winkel zwischen ihnen beträgt ca. 20°. Wie lang ist die dritte Seite? Wie viel Rasenfläche muss die Stadtverwaltung auf dieser Grünfläche mähen?

Die Schüler(innen) müssen die verbal beschriebene Situation evtl. zuerst in eine Skizze und dann in ein maßstabsgerechtes Bild übersetzen. Für die Berechnung der fehlenden Längen und

Flächeninhalte sind nur Grundkenntnisse nötig. Auch viele „eingekleidete Aufgaben“ werden in diese Kategorie fallen.

2.2.2 D-M – Herstellen von Verbindungen

Schon beim Einführen des Winkelbegriffs wird vielleicht auf die Situation *Zeiger einer Uhr* zurückgegriffen. Eine verständige Handhabung in diesem bedeutenden und oft auftretenden Kontext halte ich für ein wichtiges Ziel des Geometrieunterrichts („Nachhaltigkeit“, vgl. Aufg. 6).

Aufg. 6: Bestimme den Winkel zwischen den Zeigern um 8.20 Uhr!

Schüler(innen) müssen hierbei die Skizze selbst erstellen, d. h. einen sprachlich formulierten Sachverhalt in ein adäquates Bild übersetzen und sich die (einfachen) Winkelbeziehungen klarmachen, um zum Ergebnis 130° zu kommen.

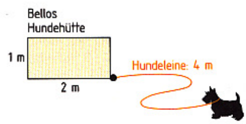

Abb. 6

Aufg. 7: (vgl. Humenberger 2007, S. 212) Bellos Hundehütte ist 2 m lang und 1 m breit. Zeichne diese im Maßstab 1 : 100 in dein Heft. Konstruiere dann jenen Bereich verkleinert in dein Heft, den Bello mit seiner 4 m langen Leine erreichen kann. Gibt es einen Bereich, den er auf zwei verschiedene Arten erreichen kann?

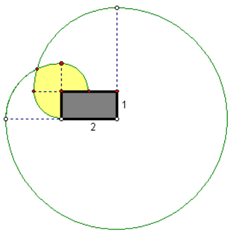

Abb. 7

Die Schüler(innen) müssen hierbei erkennen, dass Bello bei gespannter Leine sich auf Kreisbögen bewegt (D-M), dass das Seil an den Eckpunkten der Hütte „geknickt" wird, was den Radius des jeweils anschließenden Kreisstücks beeinflusst (Herstellen von Verbindungen). Der hell markierte Bereich in Abb. 7 kann auf zwei verschiedene Arten erreicht werden.

2.2.3 D-M – Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Die folgende Aufgabe betont den *Modellierungscharakter* in einem etwas engeren Sinn – der Ausgangspunkt ist eine Realsituation. Es sind nicht alle benötigten Angaben gegeben, die Schüler(innen) müssen also selbst die Aufgabe strukturieren („was brauche ich eigentlich zur Beantwortung der Fragen?") und so gezwungenermaßen tiefer über die gesamte Situation reflektieren (Lösungswege, Annahmen, Darstellungsformen, Idealisierungen, etc.). Ich halte solche Modellierungsaufgaben für sehr wichtig im Unterricht, die unbestritten wichtige Anwendungsorientierung des Unterrichts sollte nicht immer nur in *eingekleideten Aufgaben*[2] bestehen.

---

[2] Diese sind nicht grundsätzlich abzulehnen, im Gegenteil, sie sind auch wichtig für die tägliche Unterrichtspraxis: Zum Üben und zum Übersetzen von Sprache → Mathematik in kürzeren Zeiträumen (authentischere Modellierungsaufgaben brauchen ja relativ viel Zeit!). (1) Der Kontext darf allerdings nicht an den Haaren herbeigezogen sein, (2) man muss ehrlich mit ihnen umgehen, d. h. zugeben, dass sie zu Übungs- und Übersetzungszwecken eingesetzt werden (nicht weil diese für sich genommen so wichtig wären und sozusagen im „Zentrum der Anwendungsorientierung" stünden, und sich daran erkennen ließe, welchen Beitrag Mathematik zur Lösung von Problemen in der Realität leistet), (3) die Anwendungsorientierung darf sich in solchen Aufgaben nicht erschöpfen, es soll auch authentischere (diese müssen gar nicht notwendig sehr komplex sein) Modellierungsaufgaben geben, die genau den Zweck erfüllen, den nur eingekleidete Aufgaben nicht erfüllen können: Eine Realsituation steht im Vordergrund des Interesses (nicht ein mathematisches Verfahren), man will diese Situation genauer beschreiben, analysieren, bewusste Vereinfachungen treffen, überlegen *wie* und erleben *dass* Mathematik zur Problemlösung was beitragen kann.


Abb. 8

Aufg. 8[3]**:** In einer Stadt sollte im Zentrum übers Wochenende eine Sand-Handballarena entstehen – Lastzüge voll geladen mit Sand rollten ab Freitagmorgen in den Stadtkern. Damit wurde eine Fläche von 32 m × 18 m bedeckt (Spielfeld 27 m × 12 m). Die Höhe betrug durchschnittlich 35 cm. [Informiere dich selbständig, wenn du nicht gegebene Daten für die Beantwortung folgender Fragen brauchst!]

1. Was wiegt die gesamte Sandmenge ca.? Was wiegt die Sandmenge des Spielfeldes allein?
2. Wie viele Lastzüge waren dies wohl insgesamt?
3. Wie viel Wasser kann dieser Sand „schlucken" (wichtig bei Regen)? Mache dazu selbst ein Experiment mit einem Kübel bzw. Messbecher! [Wenn man z. B. einen Kübel voll mit Sand hat, kann man ja trotzdem noch eine ganze Menge Wasser hinein geben, das sozusagen den Raum zwischen den Sandkörnern füllt.]
4. Für wie viele Kinder-Sandspielplätze würde dieser Sand reichen?

2.3 Interpretieren (Int)

Interpretieren ist ein Handlungsbereich, den man nicht in erster Linie mit Geometrie verbindet, eher vielleicht mit Funktionen (Interpretieren von Funktionsgraphen) oder Beschreibender Statistik (Interpretieren von Grafiken). Aber auch in der Geometrie sind viele Aufgaben vorstellbar, die primär auf das Interpretieren abzielen, z. B. das Angeben der Bedeutung einer Formel, etc. – s. unten.

[3] Dies ist eine Aufgabe zum *Lernen*, nicht zum Leisten.

Bemerkung zum Standards-Konzept 4/07: Bei der Aufgabe mit der Regentonne (S. 83) wird nach der *Grundfläche* gefragt, aber bei einer *Regentonne* ist die Grundfläche nicht so wichtig (wichtiger: Durchmesser, Höhe, Volumen), d. h. ich würde hier auf die Regentonneneinkleidung lieber verzichten und von einem „neutralen Zylinder“ sprechen. Bei der Aufgabe zum Kegelstumpf (Skizze auf S. 85) sollte die zugehörige Ellipse auf Höhe $H-h$ ergänzt werden, der Basiskreis erscheint ja auch als Ellipse und nicht als Strecke.

2.3.1 Int – Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Aufg. 9: Hier ist ein so genannter *quadratischer Pyramidenstumpf* abgebildet. Welche der folgenden Formeln hat im Zusammenhang mit diesem eine wichtige inhaltliche Bedeutung (Länge, Flächeninhalt, Volumen)? Gib diese ggf. an:

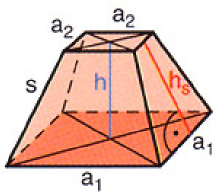

Abb. 9

1) a_1^2 2) $a_2 \cdot \sqrt{2}$ 3) $\frac{a_1^2 \cdot h}{3}$

4) $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h$ 5) $4 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s$ 6) $a_1 \cdot h \cdot a_2$

7) $\sqrt{s^2 + h^2}$ 8) $a_1^2 + a_2^2$ 9) $a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 + a_2)h_s$

Aufg. 10: Im Spiegel ist eine Uhr zu sehen. Wie spät ist es?

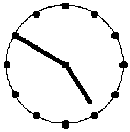

Abb. 10

Hier kann man den geometrischen Vorgang einer Spiegelung anwenden (nämlich der Zeiger, um quasi den Effekt durch den Spiegel wieder rückgängig zu machen), oder sich vorstellen, dass man sozusagen „von hinten" auf diese „gläserne" Uhr schaut.

2.3.2 Int – Herstellen von Verbindungen

Aufg. 11: Welche Multiplikation von Brüchen ist in folgendem Bild veranschaulicht? Erkläre die Rechnung, das Ergebnis und die Zusammenhänge mit eigenen Worten!

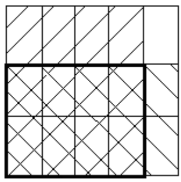

Abb. 11

Hier müssen die Schüler(innen) die Verbindung von Bruchmultiplikation, „von-Deutung" ($\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ bedeutet „$\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{3}$" oder umgekehrt) und geometrischer Darstellung herstellen.

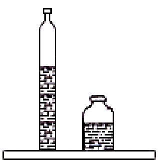

Abb. 12

Aufg. 12: In welcher Flasche ist mehr drin? Begründe deine Entscheidung!

Hier müssen die Schüler(innen) erkennen, dass die breitere Flasche ca. doppelten „Durchmesser“, der Inhalt der schmaleren Flasche dafür ca. dreifache Höhe hat. Da aber doppelter Durchmesser 4-fache Grundfläche und damit 4-faches Volumen bedeutet, ist in der rechten, dickeren Flasche mehr drin. Auch durch Abmessen und Einsetzen in geeignete Formeln kommt man zum Ergebnis. Analoges gilt, wenn man von quadratischen Flaschengrundflächen ausgeht.

2.3.3 Int – Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Aufg. 13[4]: In früheren Jahrhunderten war die „Buchstabenrechnung“ (Algebra) noch nicht so etabliert. Die Gültigkeit von Formeln begründete man damals oft mittels geometrischer Darstellungen, so z. B. noch Gerolamo CARDANO (1501 – 1576).

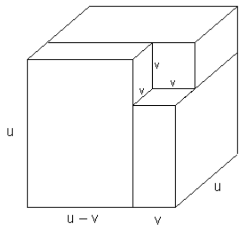

Abb. 13

a) Welche geometrische Bedeutung haben bei der nebenstehenden Abbildung die Terme u^3, v^3, $(u-v)^3$, $uv(u-v)$?

b) Erkläre mit eigenen Worten, wie man hier folgende Formel *ablesen* kann: $(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3$

c) Vergleiche diese Methode mit jener, die man heutzutage verwenden würde, wenn man die Formel in b) begründen würde (Anschaulichkeit, Zeitbedarf, Schwierigkeit, etc.)!

Hier ist nicht angegeben, dass es sich um Volumina handelt, das müssen die Schüler(innen) selbst herausfinden. Auch die Zerlegung des großen Würfels u^3 in einen kleineren (fehlenden) Würfel v^3, drei Platten und einen unsichtbaren Würfel $(u-v)^3$ sollen die Schüler(innen) selbständig sehen. Dafür müssen sie die ganze Situation (Abbildung und Terme) gründlich analysieren und die einzelnen Bedeutungen reflektieren. Speziell im Teil c) müssen die

[4] Lernaufgabe.

Schüler(innen) vergleichend reflektieren, um die Vor- und Nachteile zur heute üblichen Methode (Ausmultiplizieren, Algebra) darzustellen.

2.4 Argumentieren, Begründen (A-B)

Der Handlungsbereich *Argumentieren, Begründen* wurde in den letzten Jahrzehnten im Schulunterricht oft vernachlässigt. Gerade in der Geometrie gibt es viele Gelegenheiten dazu, noch dazu meist mit anschaulichem Hintergrund. Dabei denke ich nicht nur an die klassischen Beweise von Sätzen, sondern auch an viele andere („kleinere“, „lokalere“) Situationen, in denen Begründungen eine Rolle spielen sollten: Oft nur Plausibilitätsbegründungen, einfache Begründungen von vorgegebenen Sachverhalten mit Hilfe von Grundwissen, Nachvollziehen vorgegebener Begründungen, Wiederholen der Begründung von z. B. Flächenformeln, etc. Die Orientierungsfunktion der Standards ist eine Chance, dass Begründen im Unterricht etwas mehr Gewicht bekommt. Der Mathematikunterricht soll m. E. die Schüler(innen) *allgemein* zu einer „Begründungskultur“ erziehen, die auch über die Mathematik hinausgeht: einerseits bei selbst aufgestellten Behauptungen Begründungen mitzuliefern, andererseits bei Fremdbehauptungen nach solchen zu fragen. Dies würde die allgemeine Mündigkeit und Kommunikationskultur (Politik, Medien, Alltag, etc.) verbessern.

Bemerkung zum Standards-Konzept 4/07: Bei der Aufgabe „Rechter Winkel“ (S. 89) ist in der Skizze nicht angegeben, dass die Messlatte genau 1 m lang ist. Bei der Begründung (Lösung) ist der Satz von Pythagoras angegeben. In Wirklichkeit kommt es aber hier auf dessen *Umkehrung* an: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$ Dreieck ist rechtwinklig bei C.

2.4.1 A-B – Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Aufg. 14: Begründe mit Hilfe der jeweiligen Flächenformel (Volumenformel) zunächst für folgende Figuren (Körper[5]): Rechteck, Dreieck, Trapez, Drachenviereck (Quader, quadratische Pyramide, Drehzylinder, Drehkegel):

Wenn alle Längenmaße (Längen, Breiten, Höhen, Diagonalen, Durchmesser, etc.) mit $k>0$ multipliziert werden[6], so wird der Flächeninhalt (das Volumen) mit dem Faktor k^2 (k^3) multipliziert.

Bemerkung: Weil sich ja alle „vernünftigen" Flächen (Körper) mit Rechtecken und Dreiecken (Quadern und Pyramiden) sehr genau annähern, d. h. *ausschöpfen* lassen, ist damit sehr plausibel, dass dies auch für beliebige Flächen (Körper) gilt.

Das Kennen der jeweiligen Formel und das Ersetzen jedes Längenmaßes ℓ durch $k \cdot \ell$ erfordert nur Grundkenntnisse.

Ich halte das Phänomen, dass sich bei Längenstreckfaktor k Flächeninhalte mit dem Faktor k^2 und Volumina mit dem Faktor k^3 vergrößern, für ein sehr zentrales, das im durchschnittlichen Unterricht zu wenig Beachtung findet. Es einmal beim Kapitel Ähnlichkeit zu erwähnen ist zu wenig, wenn wir haben wollen, dass Schüler(innen) mit diesem Wissen (Phänomen) verständig umgehen und sich das auch langfristig merken. Standards haben auch Orientierungs- und Lenkungsfunktion und dies ist der Grund, warum dieses Thema hier angesprochen wird. Bei allen Volumen- und Flächenformeln kann man immer wieder ganz einfach die Frage stellen (und beantworten): Was passiert mit dem Flächeninhalt (Volumen),

---

[5] Gemeint ist in einer Aufgabe entweder die Formulierung mit Figuren oder die Formulierung mit Körpern. Es müssen auch nicht alle genannten Figuren bzw. Körper in einer Aufgabe abgefragt werden.

[6] Dies entspricht einer *zentrischen Streckung* mit dem Faktor k, ist hier aber nicht das Wesentliche. Dieser Fachbegriff könnte ggf. in die Aufgabenstellung miteinbezogen werden, muss aber nicht.

wenn die Längenmaße alle mit dem Faktor 2, 3, …, k multipliziert werden?

2.4.2 A-B – Herstellen von Verbindungen

Aufg. 15: (Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks) Begründe, dass man auf einem Kreis den Radius genau 6-mal abschlagen kann!

Hier müssen Schüler(innen) erkennen, dass das Abschlagen von r auf der Kreislinie zu einem gleichseitigen Dreieck mit Zentriwinkel 60° führt, was wegen 360° : 60° = 6 genau 6-mal möglich ist. Dieses zu erkennen ohne Hilfe ist sicher eine erhebliche Verbindungsleistung, so dass hier nicht einfach nur Grundkenntnisse eingesetzt werden müssen.

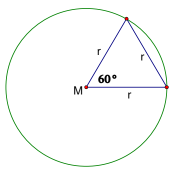

Abb. 14

Aufg. 16[7]: Warum bleibt eigentlich ein Bügelbrett in jeder Höhe parallel zum Boden? (Abb. 2).

Schüler(innen) müssen dabei erkennen und genau beschreiben, wie hier die Verbindung zwischen dieser Alltagssituation und den Strahlensätzen aussieht. Nicht nur so ein gefühltes „das ist ja irgendwie klar“ ist hier gefragt, sondern eine genauere Analyse, die genaue Verbindung eben: Die zwei diagonal stehenden Stützen sind im Punkt X „drehbar“, so dass sich der Winkel zwischen ihnen und damit die Höhe des Bügelbrettes einstellen lässt, die Längen der Teilabschnitte a, b, c, d bleiben dabei aber klarer Weise fest. Bei der Herstellung des Bügelbrettes wird dieses einmal parallel eingerichtet (d. h. die Werte von a, b, c, d passend gewählt), nämlich: $a:b=c:d$ (1. Strahlensatz); dieses Verhältnis bleibt auch bei Veränderung der Bügeltischhöhe

[7] Lernaufgabe.

erhalten $\xRightarrow[\text{1. Strahlensatzes}]{\text{Umkehrung des}}$ das Brett ist in jeder möglichen Lage („Höhe“) parallel zum Boden! Überspitzt und pointiert könnte man also sagen: „Wegen der Umkehrung des 1. Strahlensatzes kann man immer waagrecht bügeln.“

2.4.3 A-B – Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Aufg. 17: Siehe Aufg. 14; mache eine entsprechende Skizze zu diesem Phänomen für den Fall $k = 2$ und $k = 3$ bei einem Rechteck bzw. Dreieck. Erkläre anhand dieser Darstellungen, warum es beim Flächeninhalt zum jeweiligen Faktor kommt! Vergleiche mit eigenen Worten diese Art der Begründung mit jener durch Formeln (Schwierigkeit, Anschaulichkeit, Einprägsamkeit, etc.)!

Hier müssen Schüler(innen) zunächst einmal die geforderte Darstellung finden (insofern ist dies natürlich auch eine Aufgabe zum Darstellen). Alleine dabei ist Reflektieren über die geschilderte Situation nötig. Der zweite Teil der Aufgabe ist reine Reflexionsarbeit.

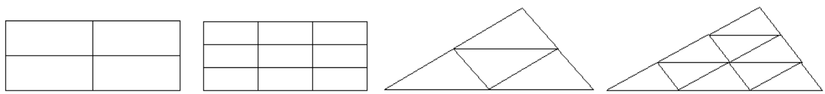

Abb. 15

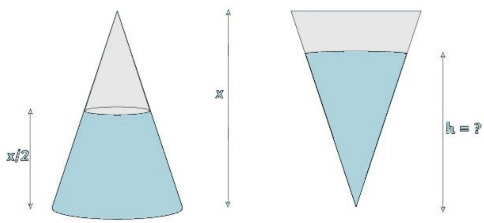

Abb. 16

Aufg. 18[8]:

Ein drehkegelförmiges Gefäß steht auf der Grundfläche und ist bis zur *halben Höhe* gefüllt. Nun wird es auf die Spitze gestellt; bis zu welchem Bruchteil (bzw. Prozentsatz) der Höhe steht nun die Flüssigkeit? Schätze zuerst! Begründe das Ergebnis!

Lösung: Der in der Abbildung links stehende Drehkegel hat die doppelten Längenmaße wie der kleine obere Restkegel (Längenstreckfaktor 2), d. h. er hat insgesamt das 2^3-fache Volumen (Volumenstreckfaktor $2^3 = 8$). Bezogen auf das Volumen bedeutet dies, dass der Drehkegel in beiden Fällen (links und rechts) zu 7/8 mit Wasser gefüllt ist. Der zugehörige Längenstreckfaktor (< 1) in der rechten Darstellung zwischen Gefäß- und Wasserkegel ist also $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{2} \approx 0{,}956$; d. h. im umgedrehten Drehkegel steht das Wasser auf über 95% der Höhe! Und das ist ein für die meisten sicher verblüffendes Resultat.

Hier wird zweimal mit dem bei ähnlichen Figuren (zentrischen Streckungen) so wichtigen Prinzip argumentiert: (Längen-) Streckfaktor = k $\Leftrightarrow$ Volumenstreckfaktor = k^3 (vgl. Aufg. 14). Man könnte hier auch durch eine relativ langwierige Rechnung zum Ziel kommen. Ein Reflektieren kann hier in zweifacher Weise in Gang gesetzt werden: 1) Reflektieren über die Vorgehensweise (Vorteile gegenüber einer längeren Rechnung: kürzer; liefert mehr Einsicht in das *Warum*). 2) Reflektieren über das Phänomen: Die meisten werden einen deutlich geringeren Wert als 95% schätzen; durch diesen Überraschungseffekt denkt man noch mal darüber nach: wie (warum) kann das zustande kommen?

---

[8] Lernaufgabe.

3 Zusammenfassung

Durch die obigen ausführlichen Darstellungen zu möglichen Aufgabenbeispielen sollte klar werden, was die im Standards-Konzept genannten Kompetenzen (Kombinationen aus Handlungs- und Komplexitätsbereichen) im Inhaltsbereich *Geometrische Figuren und Körper* bedeuten können. Die Auswahl der Beispiele ist natürlich subjektiv, auch die Zuordnung in einem gewissen Maß; so könnte es durchaus sein, dass manche Kolleg(inn)en z. B. bei der Einstufung zu den Komplexitätsbereichen eine andere Meinung haben.

Bei den Handlungsbereichen kommen im Standards-Konzept wichtige Tätigkeiten wie eine *Situation explorieren* (was ja insbesondere durch neue Medien leichter möglich wurde), Vermutungen anstellen, *Problemlösen* nicht explizit vor (was ich bedauere). Das heißt aber nicht, dass diese Tätigkeiten (man könnte die Liste auch noch fortsetzen) im Unterricht nicht auch vorkommen sollten. Ich hoffe, dass sie implizit mitgemeint sind, verstehe aber, dass Standards in einer kurzen und kompakten Kategorisierung angegeben werden müssen, so dass es aus der Sicht von Einzelnen immer wichtige andere, nicht berücksichtigte Aspekte geben wird.

Für die Diskussion innerhalb der fachdidaktischen Community und für die bildungspolitisch weitreichende Entscheidung, das Standards-Konzept, so wie es ist, zu implementieren, ist es wichtig zu überlegen, ob die gegebene Kategorisierung und Beschreibung der einzelnen Kompetenzen wirklich tragfähig ist. Dies ist insbesondere vor dem Hintergrund wichtig, dass es langfristig auch relativ nahe liegt, bei den Standards-Überprüfungen M8 irgendwann einmal zusätzlich zu ihrer *Orientierungsfunktion* auch an eine *Qualifizierungsfunktion* zu denken, so wie auch in der Oberstufe (nicht zuletzt aufgrund der international immer stärker werdenden Outputorientierung von Unterricht: Standards, zentrale Prüfungen) die Zentralmatura bereits beschlossene Sache ist und schon im Detail geplant wird.

Wichtig für Lehrkräfte ist in diesem Zusammenhang, wenn dieses Standards-Konzept implementiert wird, selber darüber nachzudenken, welche Kompetenzen durch welche Aufgaben besonders angesprochen bzw. gefördert werden können. Es ist eine fachdidaktisch interessante Aufgabe, einerseits bei vorgegebenen Aufgaben (Schulbuch oder andere Quellen) nachzudenken, in welche Kategorie des Standards-Konzepts sie primär gehören, sie ggf. durch Abänderung in eine bestimmte Richtung zu verändern, und andererseits selber Aufgaben zu bestimmten – durch die Standards vorgegebenen – Zielen bzw. Kompetenzen zu erfinden.

Literatur

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W. & Weigand, H.-G. (2001): *Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe*. In: Journal für Mathematikdidaktik 22, Heft 1, S. 73- 90.

Humenberger, H. (Hrsg.) (2007): *Das ist Mathematik 1. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 1. Klasse AHS und HS*. Wien: öbv.

Standards-Konzept 4/07 (2007): *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe.* Herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik bzw. AECC-Mathematik, Universität Klagenfurt. http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf (30.9.2009).

Wittmann, E. Ch. (1987): *Elementargeometrie und Wirklichkeit*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.