Mathematatik im Unterricht

Newsletter 2 **ISSN: 1999-3072** **Juni 2009**

Inhaltsverzeichnis

F. Schweiger: CAS und mathematische Eleganz

Sei $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ein Polynom vierten Grades. Wir setzen voraus, dass $p(x)$ zwei verschiedene Wendepunkte besitze. Dann hat die Gerade g durch die beiden Wendepunkte genau vier Schnittpunkte mit der biquadratischen Kurve. Seien etwa

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

die Abszissen dieser vier Punkte (es ist also $p''(x_2) = p''(x_3) = 0$), dann gilt die überraschende Beziehung

$$\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = G,$$

wo $G = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die Zahl des goldenen Schnittes ist.

Im CASIO-Forum (Zitterbart et al. 2009) wird dieser Satz zunächst an einem Beispiel vorgerechnet und sodann der allgemeine Fall mit Hilfe des Rechners verifiziert. Dies zeigt, dass eine elektronische Rechenhilfe einen interessanten Sachverhalt stützen kann und, da es einem Computersystem zugängliche Rechnung ist, auch beweisen kann.

Dem Mathematiker stellt sich die Frage, ob ein so schönes Ergebnis nicht ohne großen Rechenaufwand bewirkt werden kann. Dies ist tatsächlich der Fall! Man überlegt dazu folgende Vereinfachungen

(i) Durch eine Verschiebung kann man erreichen, dass $(x_2, p(x_2)) = (0, 0)$ wird (und daher auch $e = 0$ gilt). Die Gerade g, auf welcher die vier Punkte $(x_1, p(x_1)), (x_2, p(x_2)), (x_3, p(x_3))$ und $(x_4, p(x_4))$ liegen, geht durch den Nullpunkt $(0, 0)$.

(ii) Die affine Abbildung

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= -\frac{p(x_3)}{x_3}x + y \end{aligned}$$

bildet diese Gerade g in die Gerade $Y = 0$ ab.

Die Kurve

$$y = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

ist in den neuen Koordinaten

$$Y + \frac{p(x_3)}{x_3}X = X^4 + bX^3 + cX^2 + dX,$$

also

$$Y = X^4 + bX^3 + cX^2 + (d - \frac{p(x_3)}{x_3})X =: P(X).$$

Da man für die Polynomfunktion

$$p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

ohne große Mühe

$$p''(x) = 12x^2 + 6bx + 2c$$

errechnet und ebenso für

$$P(X) = X^4 + bX^3 + cX^2 + (d - \frac{p(x_3)}{x_3})X$$

die Gestalt

$$P''(X) = 12X^2 + 6bX^2 + 2c$$

erhält, werden die Wendepunkte $(x_2, p(x_2)) = (0, 0)$ und $(x_3, p(x_3))$ auf die Wendepunkte $(X_2, P(X_2)) = (0, 0)$ und $(X_3, P(X_3)) = (x_3, 0)$ abgebildet.

Es sei angemerkt, dass diese affine Abbildung Wendepunkte auf Wendepunkte abbildet, aber die Lage des Maximums und der beiden Minima verändert. Die lokalen Extreme sind die Punkte, wo die Tangente parallel zur x-Achse ist. Für die Bildkurve sind es die Punkte, deren Tangente (ursprünglich) parallel zu g läuft!

Wir können daher nun annehmen, dass die Gerade g, die durch die beiden Wendepunkte geht, die Gerade $y = 0$ ist und $x_1 < x_2 = 0 < x_3 < x_4$ die Abszissen der Schnittpunkte von g mit der Kurve $y = p(x)$ sind.

Da x_2 und x_3 Wendepunkte sind, gilt wie schon bemerkt die Beziehung

$$p''(x_2) = 0$$

und

$$p''(x_3) = 0.$$

Da $x_2 = 0$ gilt, ist $c = 0$ und $b = -2x_3$.

Nach den Formeln von Viète ist weiters

$$d = -x_1 x_3 x_4.$$

Das Polynom lautet daher

$$p(x) = x^4 - 2x_3 x^3 - x_1 x_3 x_4 x.$$

Da x_4 Nullstelle ist, erhalten wir

$$x_4^4 - 2x_3x_4^3 - x_1x_3x_4^2 = 0,$$

also

$$x_4^2 - 2x_3x_4 - x_1x_3 = 0.$$

Da $b = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -2x_3$ und $x_2 = 0$, ist $x_1 = x_3 - x_4$.

Setzen wir dies oben ein, erhalten wir

$$x_4^2 - x_3x_4 - x_3^2 = 0.$$

Dies ist aber äquivalent zu

$$(\frac{x_4}{x_3})^2 = \frac{x_4}{x_3} + 1.$$

Daher ist $\frac{x_4}{x_3} = G$, wie behauptet.

Da ja $x_4 = x_3 - x_1$, folgt sofort auch

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3} = G.$$

Zugegeben, ein bisschen listig, aber es soll beides in der Mathematik Platz haben: Kalkül und Suche nach eleganten Lösungen.
Übrigens, es ist gut möglich, dass dieser Beweis schon in der Literatur zu finden ist, aber warum lange suchen, was nicht so schwer erscheint.

Literatur

Zitterbart, Arnold u. a. 2009: Polynome 4. Grades und der Goldene Schnitt. CASIO - Forum 1 (2009), 1-2.

Gerda Buchinger und Fritz Schweiger:
Ein elementarer Zugang zu Quadriken im $\mathbb{R}^3$

1 Einleitung

Das Konzept der Fundamentalen Ideen geht auf Jerome Bruner zurück (ein geschichtlicher Überblick wurde in Schweiger 1992 gegeben). Eine neue Auseinandersetzung mit diesem Begriff liegt in Schweiger 2006 vor. Unter den zahlreichen Vorschlägen für in der Mathematik weit verbreitete Ideen findet sich das *Finden von Prototypen und Normalformen.* Das Wechselspiel zwischen *Entdecken von Prototypen* und *Aufstellen von Normalformen* lässt sich am Beispiel der Kegelschnitte gut illustrieren. Schon in der griechischen Mathematik der Antike kannte man die drei Kurven Ellipse, Parabel und Hyperbel. Ihre merkwürdigen Namen verdanken sie ihrem Auftreten bei der Verwandlung von Rechtecken in ein flächengleiches Quadrat, aber es war *geometrisch genial* zu entdecken, dass sie durch Schnitte einer Ebene mit einem Drehkegel erzeugt werden können. Diesem gemeinsamen Merkmal verdanken sie ihren Namen, eben Kegelschnitte. Dabei sind auch die *Randfälle,* die Kurve, die nur aus einem Punkt besteht, und das Paar einander schneidender Geraden erkennbar. Wenn man Gleichungen dieser Kurven aufstellt, etwa in der Form

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ y^2 &= 2px \end{aligned}$$

ist ein gemeinsames Merkmal, Kurven 2. Ordnung zu sein, ziemlich trivial. Die Entdeckung Keplers und Newtons, dass diese Kurven genau die Grundformen möglicher Planetenbahnen darstellen, muss allerdings als eine echte Überraschung angesehen werden.

Innerhalb der *affinen Geometrie* lassen sich die Kegelschnitte nach folgenden Merkmalen klassifizieren: Beschränktheit und Mehrteiligkeit (Zahl der Komponenten). Die Ellipse ist beschränkt und 1-teilig. Die Parabel ist unbeschränkt und 1-teilig. Die Hyperbel ist unbeschränkt und 2-teilig. Man kann hier verwundert innehalten und die Frage stellen: Gibt es einen Kegelschnitt, der beschränkt und 2-teilig ist? Von der Erzeugung als ebene Schnitte eines Drehkegels her gesehen, natürlich nicht. Auch die *projektive Geometrie* liefert eine Erklärung. In der reellen projektiven Ebene gibt es nur eine Art von nichtausgearteten (nicht leeren) Kurven 2. Ordnung, die alle 1-teilig sind. Je nachdem, wie die unendlich ferne Gerade festgelegt wird, entstehen Ellipsen (kein Schnittpunkt), Parabel (Tangente) und Hyperbel (zwei Schnittpunkte).

Aber wie steht es mit einer Kurve 2. Ordnung, die beschränkt und 2-teilig ist? Die Klassifikation der Kurven 2. Ordnung zeigt, dass die Kurven 2. Ordnung (bis auf Randfälle) genau die Kegelschnitte sind, und folgende *Normalformen* zu ihrer Beschreibung genügen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 + y &= 0 \end{aligned}$$

Dazu treten noch die Randfälle

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Da kommt eine derartige Kurve nicht vor!

Die nachstehenden Ausführungen sind an der Klassifikation der Quadriken, also Flächen 2. Ordnung im Raum orientiert. Der Zugang ist elementar und entspricht somit einer Forderung Bruners, nämlich Fundamentale Ideen sollten elementar vermittelt werden können.

2 Quadriken

Quadriken sind definiert als die Nullstellenmenge einer Gleichung zweiten Grades

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz = j.$$

Üblicherweise werden Quadriken mittels symmetrischer Matrizen im affinen bzw. projektiven Raum klassifiziert. Man betrachtet hiezu die beiden Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}$$

bzw. die erweiterte Matrix

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & \frac{g}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} & \frac{h}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c & \frac{i}{2} \\ \frac{g}{2} & \frac{h}{2} & \frac{i}{2} & -j \end{pmatrix}.$$

Die Klassifikation erfolgt mittels des Ranges und der Signatur der Matrizen M und $\hat{M}$. Zur Erinnerung: der Rang einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten oder Zeilen; die Signatur einer symmetrischen Matrix ist wie folgt zu beschreiben. Jede symmetrische Matrix lässt sich durch eine Drehung mit der orthogonalen Matrix ω in eine Diagonalmatrix verwandeln:

$$\omega M \omega^t = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Sei p die Wahl der positiven Zahlen unter A, B, C und n die Anzahl der negativen Zahlen unter A, B, C, so ist die Signatur von M gegeben durch $|p - n|$.

Diese Klassifikation lässt sich in einer Tabelle zusammenfassen. Wir definieren dazu:

- $\vec{f}$ Eine oder mehrere Variablen kommen in der Gleichung nicht vor.
- $\vec{l}$ Es kommt ein lineares Glied vor. Dann liegt eine Achsenrichtung in Richtung dieser Variablen.
- k Es kommt ein konstantes Glied $\neq 0$ vor. Der Punkt $(0, 0, 0)$ liegt nicht auf der Quadrik.

<table>
<tr><th></th><th>$\vec{f}$</th><th>$\vec{l}$</th><th>k</th><th colspan="3">**Gleichung**</th><th>**Bezeichnung**</th></tr>
<tr><td rowspan="8">KATEGORIE A</td><td rowspan="4">-</td><td rowspan="4">-</td><td rowspan="4">$\exists_!$</td><td colspan="3" rowspan="4">$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$</td><td>Ellipsoid</td></tr>
<tr><td>gekrümmte Spulfläche</td></tr>
<tr><td>Hyperbelschalen</td></tr>
<tr><td>leere Menge</td></tr>
<tr><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = z^2$</td><td rowspan="2">$\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} = y^2$</td><td rowspan="2">$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = x^2$</td><td>Punkt</td></tr>
<tr><td>Kegel</td></tr>
<tr><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">$\exists_!$</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = z$</td><td rowspan="2">$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = x$</td><td rowspan="2">$\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} = y$</td><td>Parabelschale</td></tr>
<tr><td>Sattelfläche</td></tr>
<tr><td rowspan="9">KATEGORIE B</td><td rowspan="3">$\exists_!$</td><td rowspan="3">-</td><td rowspan="3">$\exists_!$</td><td rowspan="3">$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$</td><td rowspan="3">$\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} = 1$</td><td rowspan="3">$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$</td><td>Zylinder</td></tr>
<tr><td>Hyperbelfläche</td></tr>
<tr><td>leere Menge</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\exists_!$</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">$\frac{x^2}{a} = y^2$</td><td rowspan="2">$\frac{x^2}{a} = z^2$</td><td rowspan="2">$\frac{y^2}{b} = z^2$</td><td>Gerade</td></tr>
<tr><td>schneidende Ebenen</td></tr>
<tr><td>$\exists_!$</td><td>$\exists_!$</td><td>-</td><td>$\frac{x^2}{a} = z$
$\frac{y^2}{b} = z$</td><td>$\frac{y^2}{b} = x$
$\frac{z^2}{c} = x$</td><td>$\frac{x^2}{a} = y$
$\frac{z^2}{c} = y$</td><td>Parabelfläche</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\exists$</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">$\exists_!$</td><td rowspan="2">$\frac{x^2}{a} = 1$</td><td rowspan="2">$\frac{y^2}{b} = 1$</td><td rowspan="2">$\frac{z^2}{c} = 1$</td><td>parallele Ebenen</td></tr>
<tr><td>leere Menge</td></tr>
<tr><td>$\exists$</td><td>-</td><td>-</td><td>$x^2 = 0$</td><td>$y^2 = 0$</td><td>$z^2 = 0$</td><td>Ebene</td></tr>
</table>

Die Klassifikation verwendet meistens die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix (siehe Zieschang 1997). Ziel der nachfolgenden Überlegungen ist es, einen elementaren Zugang zu einer Klassifikation der Quadriken zu geben.
Wir beginnen daher mit der Definition:
Die **Achsenrichtungen der Quadriken im** $\mathbb{R}^3$ sind drei zueinander orthogonale Vektoren, aus denen man gemeinsam mit einem Punkt (**Zentralpunkt**) ein kartesisches Koordinatensystem (Rechtssystem) bilden kann, bezüglich dessen sich die Quadrik durch eine Gleichung in Normalform beschreiben lässt. Die **Normalform einer Quadrikgleichung im** $\mathbb{R}^3$ besitzt keine gemischten Glieder, maximal ein lineares Glied und mindestens ein quadratisches Glied.

Hinweis: Die Quadriken der Kagegorie A besitzen nur einen Zentralpunkt. Die Quadriken der Kagegorie B besitzen mehrere Zentralpunkte.

Ziel dieser mathematischen Ausarbeitung ist es, aus der Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz = j$$

bei beliebiger Lage der Quadrik im Raum drei zueinander orthogonale Achsenrichtungen der Quadrik mit Hilfe von Drehungen der Koordinatenachsen zu ermitteln.

Wir gehen dabei von der Gleichheit folgender zwei Schreibweisen aus:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz = j$$
$$X^t \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix} X + (g, h, i)X = j.$$

Die Matrix der quadratischen und gemischten Glieder bezeichnen wir mit M.

Für die Bestimmung von drei orthogonalen Achsenrichtungen einer Quadrik nur mit Hilfe von Koordinatenachsendrehungen unterscheiden wir folgende Fälle:

A) Rang von $M \geq 2$:

I. Die Quadrikgleichung besitzt keine gemischten Glieder:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + gx + hy + iz = j$$

II. Die Quadrikgleichung besitzt genau ein gemischtes Glied

a) $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + gx + hy + iz = j$
b) $ax^2 + by^2 + cz^2 + exz + gx + hy + iz = j$
c) $ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gx + hy + iz = j$

III. Die Quadrikgleichung besitzt zwei oder drei gemischte Glieder

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz = j$$

B) Rang von $M = 1$:

I. Es gibt eine lineare Richtung

II. Es gibt keine lineare Richtung

Nun wollen wir dies etwas detaillierter darstellen.

A) Rang von $M \geq 2$:

I. Die Quadrikgleichung besitzt keine gemischten Glieder:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + gx + hy + iz = j$$

drei orthogonale Achsenrichtungen stimmen mit den Koordinatenachsenrichtungen überein.

Da Rang $M \geq 2$, seien zunächst alle drei Koeffizienten $a, b, c \neq 0$. Dann führt uns die Verschiebung

$$x' = x + \frac{g}{2a},\ y' = y + \frac{h}{2b},\ z' = z + \frac{i}{2c}$$

zur Normalform. Sei etwa $a \neq 0, b \neq 0$, aber $c = 0$. Ist $i \neq 0$, so benötigen wir die Transformation

$$x' = x + \frac{g}{2a},\ y' = y + \frac{h}{2b},\ z' = z - \frac{1}{i}(j + \frac{g^2}{4a} + \frac{h^2}{4b}).$$

Ist $i = 0$, so steht schon eine Normalform da.

II. Die Quadrikgleichung besitzt genau ein gemischtes Glied:

a) $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + gx + hy + iz = j$

Durch eine **Drehung um die z-Achse**: $X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & \frac{-k}{l} & 0 \\ \frac{k}{l} & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{X}$

$k = \tan\alpha, 0 \leq |\alpha| < 90°,\quad l^2 = \tan^2\alpha + 1$

mit $k_{1,2} = \frac{a-b}{d} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{d^2} + 1}$ kann man das gemischte Glied xy in der Gleichung verschwinden lassen.

Es ist natürlich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{k}{l} & 0 \\ \frac{k}{l} & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $ax^2 + by^2 + cz^2 + exz + gx + hy + iz = j$

Durch eine **Drehung um die y-Achse** mit $k_{1,2} = \frac{c-a}{e} \pm \sqrt{\frac{(c-a)^2}{e^2} + 1}$ $k = \tan\alpha, 0 \leq |\alpha| < 90°$ kann man das gemischte Glied xz wegbekommen.

c) $ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gx + hy + iz = j$

Durch eine **Drehung um die x-Achse** mit $k_{1,2} = \frac{b-c}{f} \pm \sqrt{\frac{(b-c)^2}{f^2} + 1}$ $k = \tan\alpha, 0 \leq |\alpha| < 90°$ kann man das gemischte Glied yz wegbekommen.

Mit Hilfe der inversen Drehung kann man drei orthogonale Achsenrichtungen der Quadrik bestimmen:		
$\begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$
$k_{1,2} = \frac{a-b}{d} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{d^2} + 1}$	$k_{1,2} = \frac{c-a}{e} \pm \sqrt{\frac{(c-a)^2}{e^2} + 1}$	$k_{1,2} = \frac{b-c}{f} \pm \sqrt{\frac{(b-c)^2}{f^2} + 1}$

III. Die Quadrikgleichung besitzt zwei oder drei gemischte Glieder:
Wir unterscheiden mehrere Fälle.

a) **Durch eine Drehung um die z-Achse** ($k = \tan\alpha, 0 \leq |\alpha| < 90°$) **kann man zwei gemischte Glieder wegbekommen.**

Aus $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz = j$ folgt durch Anwendung der Drehung

$$\left(\frac{a + b \cdot k^2 - dk}{l^2}\right) x^2 + \left(\frac{ak^2 + b + dk}{l^2}\right) y^2 + cz^2 +$$
$$\left(\frac{2(a-b)k - dk^2 + d}{l^2}\right) xy + \left(\frac{e - fk}{l}\right) xz + \left(\frac{ek + f}{l}\right) yz + \ldots.$$

Für $e \neq 0, f \neq 0, k = -f/e$ und $2(a-b) = d\left(\frac{e}{f} - \frac{f}{e}\right)$ erhalten wir

$$\frac{(ae^2 + def + bf^2)}{e^2 + f^2} x^2 + \frac{(af^2 - def + be^2)}{e^2 + f^2} y^2 + cz^2 + V_e\sqrt{e^2 + f^2} xz + \ldots$$

Wenn die Gleichung nur ein gemischtes Glied aufweist, kann man drei orthogonale Achsenrichtungen bestimmen. Die so bestimmten Achsenrichtungen werden wieder zurückgedreht.

Achsenrichtungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{f}{e} \\ \kappa_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{f}{e} \\ \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{e}{f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \kappa_{1,2} = \frac{AV_e \pm \sqrt{A^2+(e^2+f^2)^3}}{(e^2+f^2)|e|} \\ A = (c-a)e^2 + (c-b)f^2 - def \\ V_e \ldots \text{ Vorzeichen von } e \end{array}$$

Man sieht: **Eine Achsenrichtung der Quadrik liegt parallel zur xy-Ebene**.

Analog kann man für $e \neq 0, f \neq 0, k = e/f$ und

$$2(a-b) = d\left(\frac{e}{f} - \frac{f}{e}\right)$$

vorgehen.

Die Umkehrung gilt auch: Eine Achsenrichtung der Quadrik liege parallel zur xy-Ebene. Dann erfüllen die Koeffizienten der Quadrikgleichung die Gleichung

$$2(a-b) = d\left(\frac{e}{f} - \frac{f}{e}\right).$$

Wir können daher mit einer Drehung um die z-Achse zwei gemischte Glieder "wegzaubern".

b) **Durch eine Drehung um die x-Achse** $k = \tan\alpha, 0 \leq |\alpha| < 90°$) **kann man zwei gemischte Glieder wegbekommen**.

Aus $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz = j$ folgt

$$ax^2 + \left(\frac{b + ck^2 - fk}{l^2}\right)y^2 + \left(\frac{bk^2 + c + fk}{l^2}\right)z^2 + \left(\frac{d - ek}{l}\right)$$
$$xy + \left(\frac{dk + e}{l}\right)xz + \left(\frac{2(b-c)k - fk^2 + f}{l^2}\right)yz + \ldots.$$

Für $d \neq 0, e \neq 0, k = -e/d$ und $2(b-c) = f\left(\frac{d}{e} - \frac{e}{d}\right)$ erhalten wir

$$ax^2 + \frac{(bd^2 + def + ce^2)}{d^2 + e^2}y^2 + \frac{(cd^2 - def + be^2)}{d^2 + e^2}z^2 + V_d\sqrt{d^2 + e^2}xy + \ldots$$

Wenn die Gleichung nur ein gemischtes Glied aufweist, kann man drei orthogonale Achsenrichtungen bestimmen. Die so bestimmten Achsenrichtungen werden wieder zurückgedreht.

Achsenrichtungen:

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ 1 \\ \frac{e}{d} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \kappa_2 \\ 1 \\ \frac{e}{d} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{d}{e} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \kappa_{1,2} = \frac{A \cdot V_d \pm \sqrt{A^2+(d^2+e^2)^3}}{(d^2+e^2)|d|} \\ A = (a-b)d^2 + (a-c)e^2 - def \\ V_d \ldots \text{ Vorzeichen von } d \end{array}$$

Dies bedeutet: **Eine Achsenrichtung liegt parallel zur yz-Ebene**.

Analog geht man vor, wenn $d \neq 0, e \neq 0, k = d/e$ und $2(b-c) = f\left(\frac{d}{e} - \frac{e}{d}\right)$

Die Umkehrung gilt auch: Eine Achsenrichtung der Quadrik liegt parallel zur yz-Ebene. Die Koeffizienten der Quadrikgleichung erfüllen die Gleichung $2(b-c) = f\left(\frac{d}{e} - \frac{e}{d}\right)$. Wir können mit einer Drehung um die x-Achse zwei gemischte Glieder "wegzaubern".

c) **Durch eine Drehung um die y-Achse** ($k = \tan\alpha, 0 \leq |\alpha| < 90°$) **kann man zwei gemischte Glieder wegbekommen.**

Auf ähnliche Weise erhält man etwa das Ergebnis

Achsenrichtungen:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{f} \\ \kappa_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{f} \\ \kappa_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{f}{d} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \kappa_{1,2} = \frac{AV_f \pm \sqrt{A^2+(d^2+f^2)^3}}{(d^2+f^2)|f|} \\ A = (b-a)d^2 + (b-c)f^2 - def \\ V_f \ldots \text{ Vorzeichen von } f \end{array}$$

Eine Achsenrichtung liegt parallel zur xz-Ebene.

Man wird vielleicht schon entdeckt haben, dass man Fall b) und Fall c) aus Fall a) durch zyklische Vertauschungen $a \to b \to c$ und $d \to f \to e$ erhalten kann.

d) **Dann verbleibt als letzter Fall, dass keine der vorher genannten Bedingungen erfüllt ist**.

Wir versuchen eine Drehung um die z-Achse zu finden, die eine Achsenrichtung der Quadrik parallel zur yz-Ebene dreht. Denn für diesen Fall können wir diese eine Achsenrichtung sofort angeben sowie die anderen zwei Achsenrichtungen berechnen.

Also wir suchen einen Drehwinkel $\tan\alpha = k$ $(0 \leq |\alpha| < 90°)$ bzw. eine Drehung um die z-Achse,

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{k}{l} & 0 \\ \frac{k}{l} & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X,\ l = \sqrt{k^2+1}$$

die eine Achsenrichtung der Quadrik parallel zur yz-Ebene dreht und die Koeffizienten der Quadrikgleichung so umformt, dass die Gleichung $2(b-c) = f\left(\frac{d}{e} - \frac{e}{d}\right)$ erfüllt ist.

Wir führen eine Drehung um die z-Achse durch mit k als Unbekannte

$$X^t \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{k}{l} & 0 \\ \frac{k}{l} & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & \frac{k}{l} & 0 \\ -\frac{k}{l} & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \ldots$$

und setzen die Koeffizienten der neuen Gleichung in Abhängigkeit von k in $2(b-c) = f\left(\frac{d}{e} - \frac{e}{d}\right)$ ein. Dies ergibt

$$\frac{ak^2 + dk + b - c(k^2+1)}{(k^2+1)} =$$

$$\frac{ek+f}{2l}\left[\frac{-dk^2 + 2(a-b)k + d)}{2l^2}\frac{2l}{(e-fk)} - \frac{(e-fk)}{2l}\frac{2l^2}{(-dk^2 + 2(a-b)k + d)}\right].$$

Durch Umformungen erhalten wir ein Polynom fünften Grades in k und die Gleichung

$[2(a-c)df + e(f^2-d^2)]k^5 + [2de(a+c-2b) + d^2f - 4(a-b)(a-c)f - 2e^2f + f^3]k^4 + [4(a-b)(b-c)e + 2df(b-a) + e^3 - ef^2]k^3 + [2de(a-b) - 4f(a-b)(a-c) - e^2f + f^3]k^2 + [4(a-b)(b-c)e + d^2e - 2df(2a-b-c) + e^3 - 2ef^2]k + 2(b-c)de - d^2f + e^2f = 0$

Wir können durch k^2+1 dividieren und kommen somit für die Bestimmung der reellen Nullstellen zu einer Gleichung vom Grad ≤ 3.

$\chi(k) = [2(a-c)df + e(f^2-d^2)]k^3 + [(-4)(a-b)(a-c)f - 2de(b-c) + f(d^2-e^2) + 2de(a-b) - f(e^2-f^2)]k^2 + [4(a-b)(b-c)e + 2df(c-a) + e(d^2-f^2) - 2df(a-b) + e(e^2-f^2)]k + 2de(b-c) - f(d^2-e^2) = 0$

Diese Gleichung ist sicher eine kubische Gleichung, da der Fall (c) nicht vorliegt.

Hinweis: Kennt man eine reelle Lösung k dieser kubischen Gleichung, so kann man eine Achsenrichtung

$$\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ A(k) \end{pmatrix}, \; A(k) = \frac{dk^2 - 2(a-b)k - d}{e - fk}$$

sofort hinschreiben.

Begründung: k bestimmt einen Drehwinkel durch $\tan\alpha = k$ für eine Drehung um die z-Achse, die eine Achsenrichtung der Quadrik parallel zur yz-Ebene dreht. Liegt nur eine Achsenrichtung parallel zur yz-Ebene, so kann man diese sofort angeben. Diese Achsenrichtung zurückgedreht ergibt das obige Ergebnis.

Anmerkungen

1) Ist $2(b-c) = f\left(\frac{d}{e} - \frac{e}{d}\right)$, so ist keine Drehung erforderlich, da eine Achse schon parallel zur (yz)-Ebene liegt. Dies wird algebraisch durch das Verschwinden des konstanten Gliedes von $\chi(k)$ ausgedrückt und $k = 0$ ist entsprechend $\alpha = 0°$ eine Lösung.

2) Ist $2(c-a) = e\left(\frac{f}{d} - \frac{d}{f}\right)$, so liegt eine Achse schon parallel zur (xz)-Ebene. Das Polynom $\chi(k)$ ist dann quadratisch und hat zwei Lösungen für k, die den beiden anderen Achsen entsprechen. Da in diesem Fall aber $\alpha = 90°$ ist, wäre $k = \tan\alpha = \infty$, weswegen dieser Winkel nicht unter den Nullstellen von $\chi(k)$ aufscheint!

3) Ist $2(a-b) = d\left(\frac{e}{f} - \frac{f}{e}\right)$, so liegt eine Achse parallel zur (xy)-Ebene. Dann gilt für den Winkel dieser Achse

$$A(k) = \frac{dk^2 - 2(a-b)k - d}{e - fk} = 0,$$

also

$$k^2 - \frac{2(a-b)}{d}k - 1 = k^2 - \frac{e^2 - f^2}{ef}k - 1 = 0,$$

woraus $k = -\frac{f}{e}$ folgt. Eine mühsame Rechnung zeigt, dass in diesem Fall $k = -\frac{f}{e}$ tatsächlich eine Nullstelle von $\chi(k)$ ist.

B) Rang von $M = 1$:

Mindestens ein Vektor von den drei Spaltenvektoren von M beschreibt die quadratische Achsenrichtung $\vec{q}$ der Quadrik. Die Spaltenvektoren von M sind zueinander parallel.

I. **Es gibt eine lineare Achsenrichtung**
Dies trifft nur für die Parabelfläche zu. Die drei orthogonalen Achsenrichtungen der Parabelfläche sind wie folgt zu bestimmen:

$\vec{q}$	$\vec{f} = \vec{q} \times \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$	$\vec{l} = \vec{f} \times \vec{q}$

II. **Es gibt keine lineare Achsenrichtung**
Es ist nur die quadratische Achsenrichtung $\vec{q}$ der Quadrik durch die Koeffizienten der Quadrikgleichung festgelegt.

3 Zum Schluss

Diese Ausarbeitung beruht auf Teilen der mathematikdidaktischen Dissertation von Frau Gerda Buchinger an der Universität Salzburg. Die nachstehende kurze Bibliographie gibt einige Anregungen zum Weiterlesen.

Literatur

[1] KAHLE, Dietrich (1996): Zur Rolle des Erlanger Programms im Geometrieunterricht. *Mathematische Semesterberichte* 43, Heft 1, 1-20

[2] SCHAAL, Hermann (1976): *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, Band I.

[3] SCHWEIGER, Fritz (1992): Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *JMD* 13, 199-214

[4] SCHWEIGER, Fritz (2006): Fundamental Ideas: A Bridge between Mathematics and Mathematical Education. In J. Maasz & W. Schlöglmann eds: *New Mathematics Education Research and Practice*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers 2006 p. 63-73

[5] ZIESCHANG, Heiner (1997): *Lineare Algebra und Geometrie* B.G. Teubner Stuttgart.

Jürgen Maaß, Linz und Stefan Götz, Wien

Österreichs neue Zukunft: Glücklichere Schulkinder und viel mehr Arbeitslose?

In einer APA-Aussendung vom 26.01.2009 wird über den „Startschuss für neue Lehrer-Ausbildung“ berichtet. Wenn die Informationen stimmen, will sich Österreich aus dem Kreis der Industrienationen verabschieden, um den Kindern eine pädagogisch – glückliche Schulzeit zu sichern. Als zentraler Schritt in diese Richtung soll eine Reform der Ausbildung von LehrerInnen wirken, die pädagogische Aspekte ins Zentrum und fachliche Qualifikation in den Hintergrund setzt.

Die von PädagogInnen und PH-VertreterInnen dominierte Besetzung (die forschungsbasierte Fachdidaktik ist nicht vertreten, ebensowenig wenigstens exemplarisch einzelne Fächer) der eingesetzten Expertenkommission und die in der Pressekonferenz verkündeten Eckpunkte der geplanten Reform zeigen unmissverständlich die eingeschlagene Richtung. In den ersten drei Jahren der geänderten Ausbildung, also bis zum Abschluss „Bachelor“ soll im "Joint Study"-Verfahren an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen das Pädagogische gelernt werden. Fachlich wird die Ausbildung auf dem derzeit im Vergleich zu den Universitäten schwachen Niveau der Pädagogischen Hochschulen bleiben müssen, weil ja Durchlässigkeit in alle Richtungen und auf allen Schulstufen angestrebt wird. Erst in der zweiten Studienphase mit dem Ziel „Master“ wird die Fachausbildung auf universitärem Niveau stattfinden können. Niemand wird glauben, dass dann fachlich in zwei Jahren soviel gelernt werden kann wie heute in fünf Jahren. Nimmt man die PISA-Ergebnisse ernst, müsste an der fünfjährigen Fachausbildung der LehrerInnen an den Universitäten (wo Lehramtsstudierende neben einer fundierten fachlichen Ausbildung fachdidaktische und pädagogische Berufsvorbereitung unter wissenschaftlichen Gesichtspunkten erfahren) weiter gearbeitet und auf jeden Fall das Niveau der Fachausbildung an der PH erheblich gesteigert werden, um Österreich wirtschaftlich konkurrenzfähig zu halten. Damit wird von der Regierung zur Reform der LehrerInnenausbildung also eine Grundsatzentscheidung gefällt – für die Pädagogik und gegen das Fach, und damit gegen den Wirtschaftsstandort Österreich.

Ao. Univ.-Prof. Univ.-Doz. Dr. Jürgen Maaß lehrt Fachdidaktik Mathematik an der Universität Linz.
Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz lehrt Fachdidaktik Mathematik an der Universität Wien.